

$$y_{B1} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

+

$$y_{B2} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

=

$$y_B = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{qL^4}{8EI}$$

# DEFLEXIONES EN VIGAS TEORÍA Y EJERCICIOS

RODGER SALAZAR LOOR



# **DEFLEXIONES EN VIGAS**

## TEORÍA Y EJERCICIOS

RODGER SALAZAR LOOR



## **TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS:**

Se autoriza la reproducción de esta obra con fines educativos y otros que no sean comerciales sin permiso escrito previo de detentar el derecho de autor, siempre y cuando se mencione la cita de los autores de esta obra.

© Salazar Loor, Rodger Benjamin

© Ediciones Gesticap.

El Carmen, Manabí, Ecuador

[www.gesticap.com](http://www.gesticap.com)

## **ISBN: 978-9942-626-20-2.**

Deposito legal:

1ra Edición: Ediciones Gesticap, Calle 24 de julio y Ave 3 de julio, El Carmen, Manabí Ecuador.

Copyright © Diciembre 2023.

## **COMO CITAR ESTE LIBRO:**

Salazar Loor, R. B. (2023). Deflexiones en vigas: teoría y ejercicios. Ediciones GESICAP. 152 pp.

## **EQUIPO EDITORIAL:**

Edición y Diagramación: Sergio Alejandro Rodríguez Hernández

Revisión y Corrección: Xenia Pedraza González.

Cubierta y diseño: Sergio Alejandro Rodríguez Hernández

Imagen de Cubierta: Rodger Salazar Loor.

# Índice

CAPÍTULO I Método de doble integración.....	4
1.1. Deflexión en vigas.....	7
1.2. Condiciones de frontera.....	10
1.3. Convenciones de signos .....	10
1.4. Método de doble integración (M.D.I.) .....	11
1.4.1. Viga empotrada con carga puntual en el extremo .....	11
1.4.2. Viga empotrada con carga puntual ubicada en un punto determinado.....	16
1.4.3. Viga empotrada con carga distribuida rectangular completa .....	21
1.4.4. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde empotramiento..	26
1.4.5. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre ....	31
1.4.6. Viga empotrada con momento en el extremo.....	37
1.4.7. Viga empotrada con carga distribuida triangular decreciente total.....	41
1.4.8. Viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total.....	46
1.4.9. Viga apoyada en los extremos con carga puntual ubicada en el centro .....	50
1.4.10. Viga apoyada en los extremos con carga distribuida rectangular completa.....	56
1.5. Método de Macaulay .....	62
1.5.1. Pasos de aplicación del método de Macaulay .....	62
1.6. Problemas .....	69
CAPÍTULO II Método de superposición .....	71
2.1. Método de superposición.....	72
2.2. Problemas .....	88
CAPÍTULO III Método de Momento de Área .....	89

3.1.	Generalidades .....	90
3.2.	Teorema 1 .....	91
3.2.1.	Criterios de aplicación del Teorema 1 .....	92
3.3.	Teorema 2.....	92
3.3.1.	Criterios de aplicación del Teorema 2.....	93
3.4.	Diagrama de momentos por partes .....	93
3.5.	Problemas .....	115
CAPÍTULO IV Método de la viga conjugada.....		117
4.1.	Generalidades .....	118
4.2.	Teorema 1 .....	120
4.3.	Teorema 2.....	120
4.4.	Convención de signos.....	120
4.5.	Problemas .....	136
CAPÍTULO V Vigas indeterminadas.....		138
5.1.	Generalidades .....	139
5.2.	Ventajas .....	140
5.3.	Doble integración .....	140
5.4.	Superposición .....	144
5.5.	Momento de área .....	146

## **Acerca del autor**

Ha recibido el título de Ingeniero Mecánico de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo en 2015; de Master en Magíster en Diseño mecánico mención en fabricación de autopartes de vehículos de la Universidad Internacional SEK.

Ha realizado varias publicaciones de artículos y libros en revistas y repositorios científicos de medio y alto impacto. Sus campos de investigación son el Diseño mecánico, Diseño y simulación computacional, Métodos de análisis multicriterio y Selección de materiales. Actualmente trabaja como docente de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo donde ha impartido asignaturas como: Neumática e Hidráulica, Sistema de Flujo de Fluidos, Dinámica de Fluidos, Resistencia de Materiales, Esfuerzos y Deformaciones, Mecánica de los Materiales Básica, Mecánica de los Materiales Avanzada, Cálculo Vectorial, Diseño de Máquinas, Termodinámica Aplicada, Termodinámica y Ondas Mecánicas.

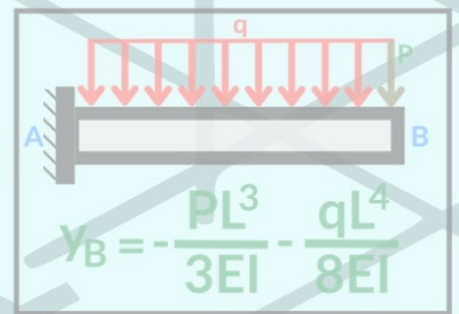
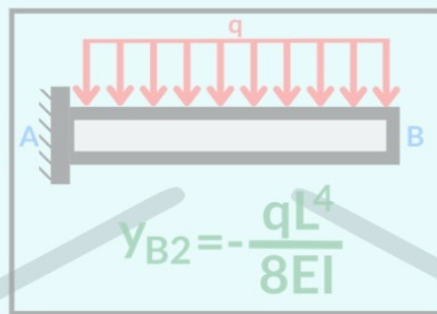
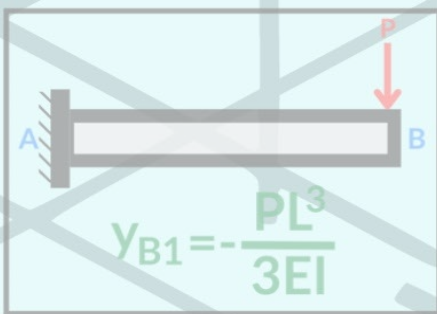
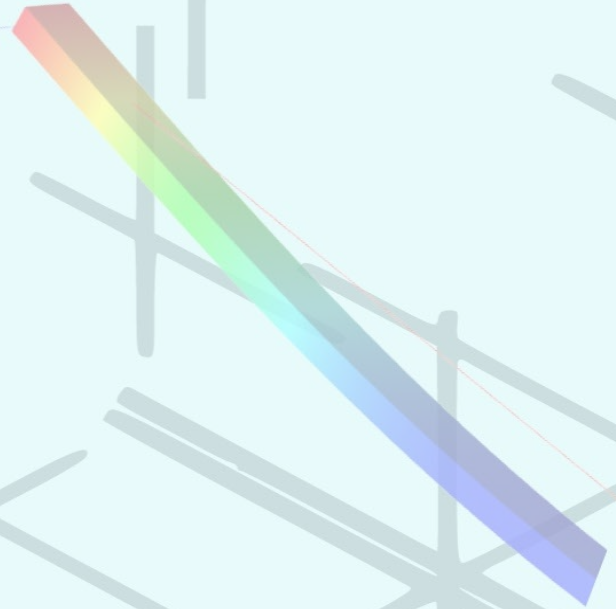
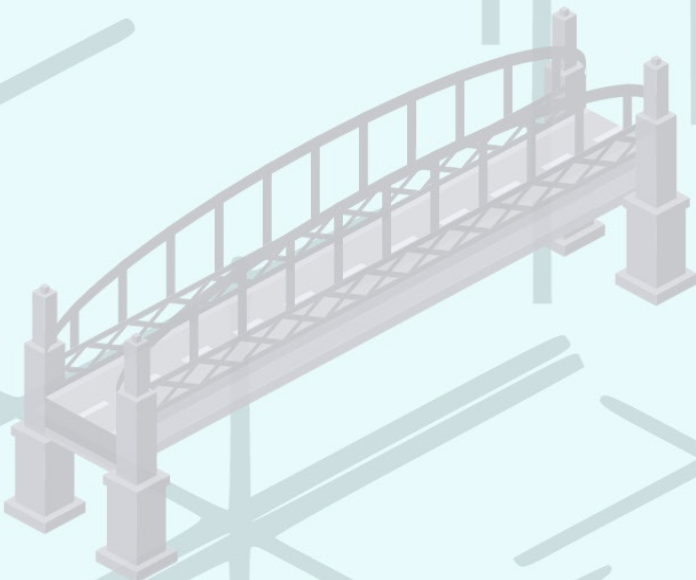
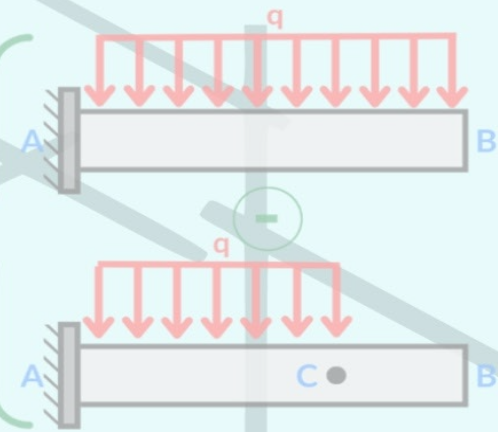
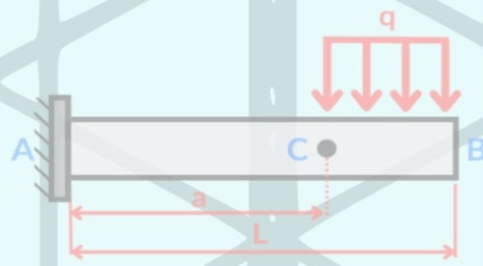
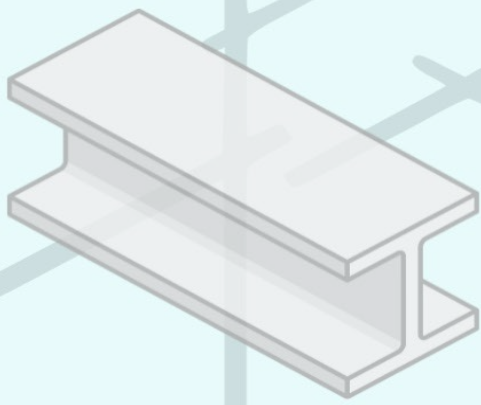
**Rodger Salazar Loor**

## **PREFACIO**

La ingeniería mecánica es el arte de dar vida a las máquinas, donde cada pieza y cada componente se convierten en los cimientos de la funcionalidad y la eficiencia. Dentro de este mundo de precisión y movimiento, el estudio de las deflexiones en vigas emerge como un pilar fundamental, delineando la resistencia y la estabilidad de estructuras cruciales para la ingeniería moderna.

Este libro surge de la necesidad por comprender la mecánica subyacente que dicta cómo las vigas soportan cargas y resisten las fuerzas que moldean nuestro entorno. Se ha diseñado específicamente para estudiantes, ingenieros y entusiastas de la ingeniería mecánica que buscan profundizar en la esencia de cómo las vigas, elementos aparentemente simples, sostienen la complejidad de máquinas y estructuras robustas. Es necesario tener conocimientos preliminares de física, estática y ecuaciones diferenciales para su entendimiento y comprensión.

A lo largo de estas páginas, se abordará las teorías y principios fundamentales que rigen las deflexiones en vigas. Desde los conceptos básicos hasta los desafíos más avanzados, este libro ofrece un enfoque exhaustivo para comprender, calcular y aplicar las deflexiones en vigas en el diseño y la optimización de componentes mecánicos. Asimismo, se presenta una serie meticulosa de ejercicios diseñados para desafiar y consolidar su comprensión de los conceptos presentados.



# CAPÍTULO I

## MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN



## Objetivos

- Comprender los fundamentos teóricos del análisis de vigas mediante el método de doble integración, explorando las condiciones de contorno y las ecuaciones diferenciales asociadas a la flexión de vigas.
- Dominar el proceso de resolución paso a paso para aplicar el método de doble integración en el cálculo preciso de las deflexiones en vigas, desde la obtención de las ecuaciones de la línea elástica hasta la interpretación de cómo las vigas se deforman bajo cargas específicas.
- Aplicar activamente el método de doble integración en una variedad de problemas y ejemplos prácticos, permitiendo a los lectores una experiencia directa en la resolución de situaciones reales y diversas en ingeniería mecánica.
- Desarrollar habilidades para evaluar y validar los resultados obtenidos mediante el método de doble integración, comprendiendo la importancia de la verificación de cálculos y la comprensión de la precisión y limitaciones inherentes a este método en distintos contextos de análisis estructural.

## 1.1. Deflexión en vigas

Considérese una viga apoyada en sus extremos que se encuentra sometida a una carga en el centro como se muestra en la Figura 1.1, de manera que al actuar directamente sobre la viga se produce un desplazamiento vertical que la deforma y modifica su geometría original. La forma adoptada por el eje neutro de la viga se convierte en una línea curva denominada curva elástica, mientras que la deformación en el eje y se conoce como deflexión (Rajput, 2018).

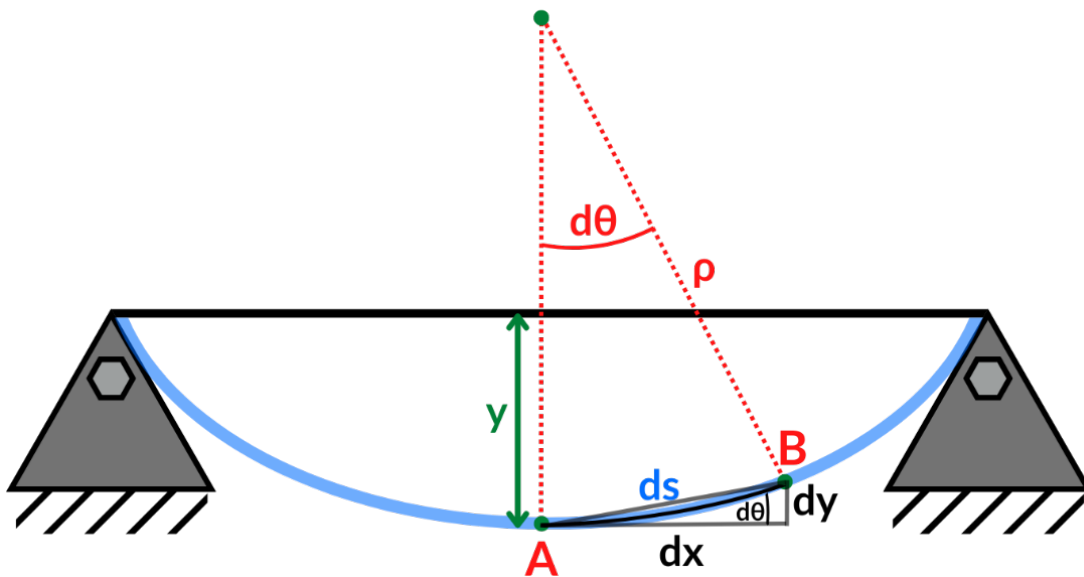


Figura 1.1. Deflexión en viga

Si para la curva generada por la deflexión se toman dos puntos arbitrarios A y B, se puede relacionar la longitud del arco con un ángulo de posición  $d\theta$  denominado pendiente mediante la Ecuación 1.1.

$$ds = d\theta\rho \quad (\text{Ec. 1.1})$$

Suponiendo que el valor de la longitud del arco es pequeño se podría asumir que  $ds \approx dx$ , y sustituyendo esta expresión y expresando el ángulo  $d\theta$  en términos de  $dx$  se obtiene la Ecuación 1.2.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{Ec. 1.2})$$

Por otro lado, se puede observar que la tangente entre los puntos A y B y el eje X, produce un ángulo  $d\theta$ , que al relacionarlo con los desplazamientos en x e y se obtiene la Ecuación 1.3.

$$\tan d\theta = \frac{dy}{dx} \quad (\text{Ec. 1.3})$$

Suponiendo que el valor del ángulo es pequeño se podría asumir que  $d\theta \approx \tan d\theta$ , y sustituyendo esta expresión se obtiene la Ecuación 1.4.

$$d\theta = \frac{dy}{dx} \quad (\text{Ec. 1.4})$$

Derivando la Ecuación 1.4 con respecto a x, se obtiene la Ecuación 1.5.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{Ec. 1.5})$$

Igualando las Ecuaciones 1.2 y 1.5, se obtiene Ecuación 1.6.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{Ec. 1.6})$$

Aplicando la teoría de vigas en flexión se tiene que la relación momento curvatura se representa mediante la Ecuación 1.7.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. 1.7})$$

Igualando las Ecuaciones 1.6 y 1.7, se obtiene Ecuación 1.8 que se conoce como la ecuación de la viga elástica.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. 1.8})$$

Es posible expresar la ecuación de la viga elástica en dos formas alternativas, derivando con respecto a x, y considerando que  $V = \frac{dM}{dx}$  y  $q = \frac{dV}{dx}$ , se obtienen las Ecuaciones 1.9 y 1.10.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{V}{EI} \quad (\text{Ec. 1.9})$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q}{EI} \quad (\text{Ec. 1.10})$$

## 1.2. Condiciones de frontera

Se representan como valores conocidos de las deflexiones y pendientes en particulares localizaciones a lo largo de una viga (Philpot, 2017a). Se puede identificar en la Figura 1.2 que las condiciones de frontera localizadas en apoyos fijos y móviles no presentan deflexiones, sin embargo, son susceptibles a rotaciones. Por otro lado, en la ubicación de empotramientos no se producen ni deflexiones ni rotaciones. Por último, en los extremos libres no se producen fuerzas cortantes ni momentos internos.

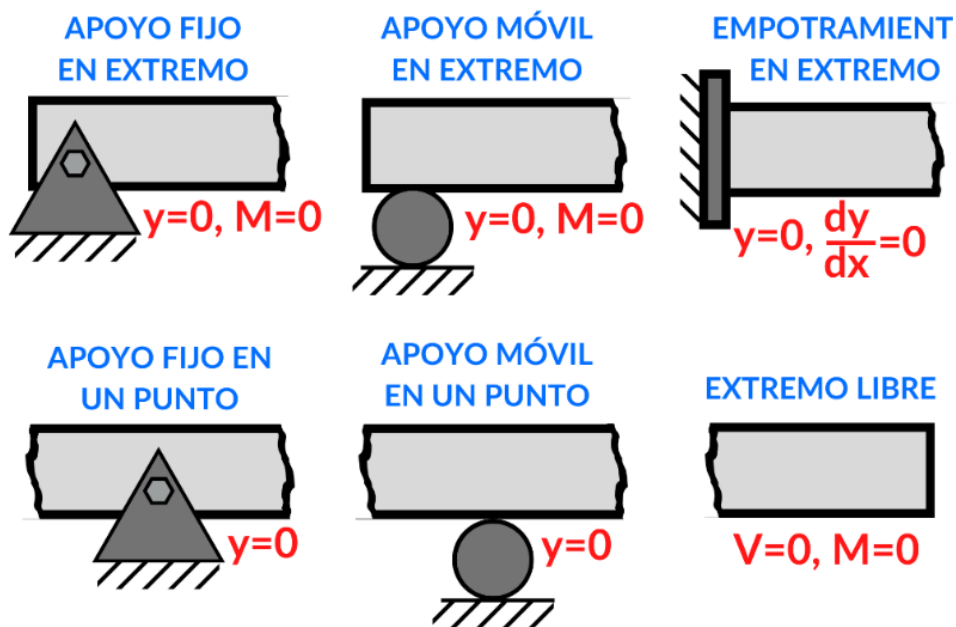


Figura 1.2. Condiciones de frontera en vigas

## 1.3. Convenciones de signos

Para encontrar la pendiente y la deflexión de una viga en cualquier localización se deberá considerar ciertas convenciones de signos (Singh, 2021), que se indican a continuación:

- Las posiciones de  $x$  e  $y$  son positivas cuando se recorre hacia la derecha y hacia arriba.
- La deflexión es negativa cuando la viga se deforma hacia abajo de su posición original.
- La pendiente es positiva se mide en sentido antihorario con respecto al eje  $x$ , y negativa cuando se mide en sentido horario.
- El momento flector es positivo cuando se produce compresión en la parte superior de la viga, y negativa cuando se produce tracción en la parte superior.

## 1.4. Método de doble integración (M.D.I.)

El método consiste en una resolución algebraica de la Ecuación 1.8, empleando la integración doble del momento flector en términos de  $x$ . Es importante indicar que este método presenta ciertas limitaciones a casos específicos de carga individual, por lo que los casos abordados a continuación familiarizaran al lector con el procedimiento de cálculo.

### 1.4.1. Viga empotrada con carga puntual en el extremo

Se considera una viga empotrada en donde actúa una carga puntual en su extremo como se muestra en la Figura 1.3, al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - P(L - x) = 0$$

$$M_x = P(L - x)$$

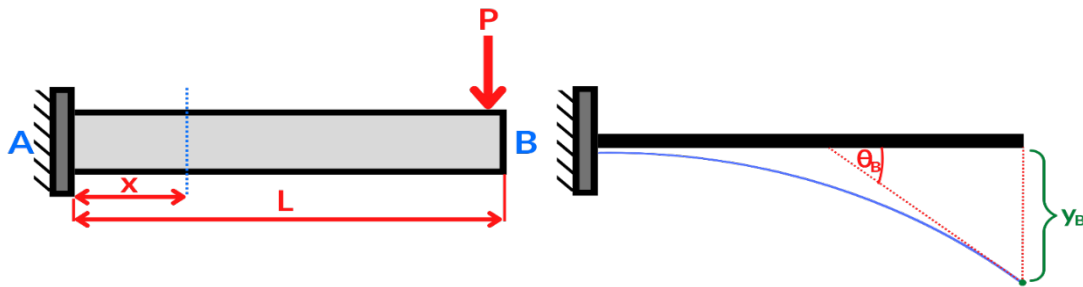


Figura 1.3. Viga empotrada con carga puntual en el extremo

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(L - x) \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -P \int (L - x) dx$$
$$EI \frac{dy}{dx} = -P \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = -P \left( L(0) - \frac{(0)^2}{2} \right) + C_1$$

$$0 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $\theta_B = \frac{dy}{dx}$ ,  $C_1 = 0$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.11:

$$EI\theta_B = -P \left( L(L) - \frac{L^2}{2} \right) + 0$$

$$EI\theta_B = -P \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right)$$

$$EI\theta_B = -\frac{PL^2}{2}$$

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI} \quad (\text{Ec. 1.11})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = -P \int \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) dx + C_1 \int dx$$

$$EIy = -P \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -P \left( \frac{L(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{6} \right) + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $y = y_B$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.12:

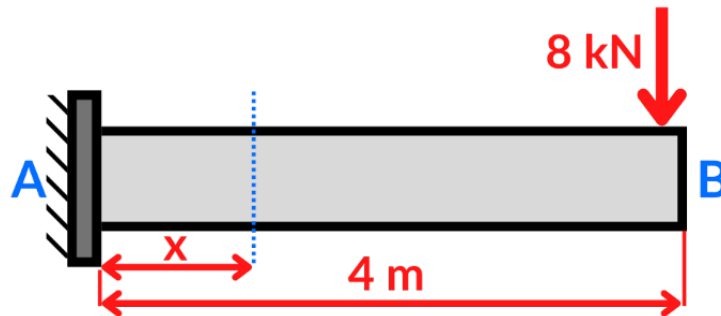
$$EIy_B = -P \left( \frac{L(L)^2}{2} - \frac{L^3}{6} \right) + (0)L + 0$$

$$EIy_B = -P \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) + 0 + 0$$

$$EIy_B = -P \left( \frac{L^3}{3} \right)$$

$$y_B = y_{\max} = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{Ec. 1.12})$$

**Ejemplo 1.1.** Una viga empotrada tiene una longitud de 4 m y una carga de 8 kN que actúa en su extremo, como se muestra en la Figura 1.4. Determine la deflexión máxima producida, considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



**Figura 1.4.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga puntual en el extremo.

**Datos**

$$I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 65 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$L = 4 \text{ m}$$

$$P = 8 \text{ kN}$$

### Resolución

Realizando un corte en el punto  $x$  hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 8(4 - x) = 0$$

$$M_x = 8(4 - x)$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -8(4 - x) \quad [I]$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = 4(4 - x)^2 + C_1 \quad [II]$$

$$EIy = -\frac{4}{3}(4 - x)^3 + C_1x + C_2 \quad [III]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = 4(4 - 0)^2 + C_1$$

$$0 = 64 + C_1$$

$$C_1 = -64$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = -\frac{4}{3}(4 - 0)^3 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = -\frac{256}{3} + 0 + C_2$$



$$C_2 = \frac{256}{3}$$

Substituyendo  $x = 4$ ,  $C_1 = -64$ ,  $C_2 = \frac{256}{3}$ ,  $E = 200 \times 10^6$ ,  $I = 65 \times 10^{-6}$  en la expresión [III] se obtiene:

$$(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6})y = -\frac{4}{3}(4 - 4)^3 - 64(4) + \frac{256}{3}$$

$$13000y = 0 - 256 + \frac{256}{3}$$

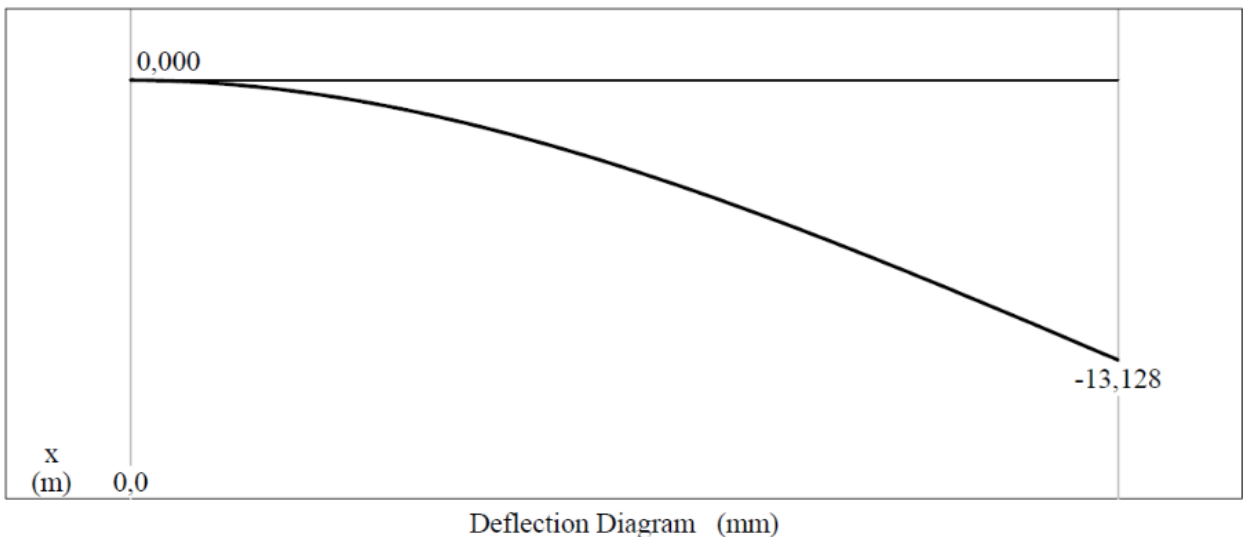
$$13000y = -\frac{512}{3}$$

$$y = -\frac{512}{3(13000)} = -0.01313 \text{ m} = -13.13 \text{ mm}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.12 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$y_{\max} = -\frac{8(4)^3}{3(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6})} = -0.01313 \text{ m} = -13.13 \text{ mm}$$

Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.5, siendo el valor de la deflexión coincidente con lo calculado.



**Figura 1.5. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga puntual en el extremo.**

### 1.4.2. Viga empotrada con carga puntual ubicada en un punto determinado

Se considera una viga empotrada en donde actúa una carga puntual en un punto determinado como se muestra en la Figura 1.6, al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede analizar estáticamente su momento interno.

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - P(a - x) = 0$$

$$M_x = P(a - x)$$

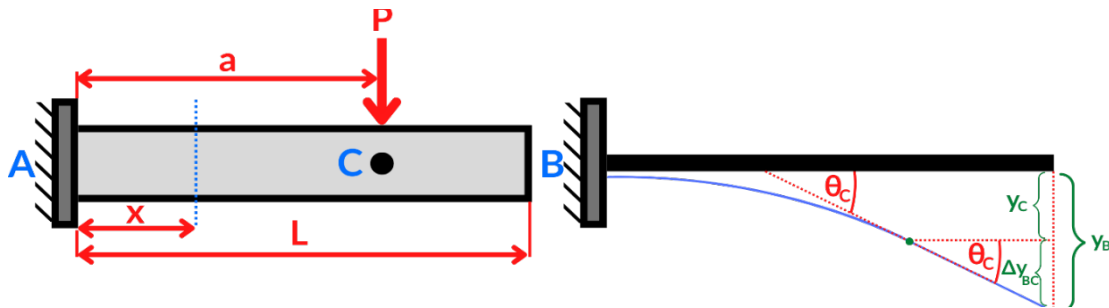


Figura 1.6. Viga empotrada con carga puntual ubicada en un punto determinado

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(a - x) \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -P \int (a - x) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -P \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = -P \left( a(0) - \frac{(0)^2}{2} \right) + C_1$$

$$0 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

En la condición de frontera donde se aplica la carga en el punto C, sustituyendo cuando  $x = a$ ,  $\theta_C = \frac{dy}{dx}$ ,  $C_1 = 0$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.13.

$$EI\theta_C = -P \left( a(a) - \frac{a^2}{2} \right) + 0$$

$$EI\theta_C = -P \left( a^2 - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$EI\theta_C = -\frac{Pa^2}{2}$$

$$\theta_C = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (\text{Ec. 1.13})$$

Cuando se aplica la carga en algún punto de la viga, desde esa ubicación en adelante la pendiente se mantendrá constante, de manera que la pendiente de C a B se expresa con la Ecuación 1.14.

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (\text{Ec. 1.14})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = -P \int \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) dx + C_1 \int dx$$

$$EIy = -P \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -P \left( \frac{a(0)^2}{2} - \frac{(0)^2}{6} \right) + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera donde se aplica la carga en el punto C, sustituyendo cuando  $x = a$ ,  $y = y_C$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.15:

$$EIy_C = -P \left( \frac{a(a)^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + (0)a + 0$$

$$EIy_C = -P \left( \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + 0 + 0$$

$$EIy_C = -\frac{Pa^3}{3}$$

$$y_C = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad (\text{Ec. 1.15})$$

Para determinar la deflexión en el punto B se debe considerar el tramo  $\Delta y_{BC}$ , mediante la siguiente expresión:

$$\tan \theta_C = \frac{\Delta y_{BC}}{L - a}$$

$$\tan \theta_C (L - a) = \Delta y_{BC}$$

$$\Delta y_{BC} = \tan \theta_C (L - a)$$

Considerando que el ángulo  $\theta_C$  es pequeño se puede considerar que  $\tan \theta_C \approx \theta_C$

$$\Delta y_{BC} = \theta_C (L - a) \quad [\text{IV}]$$

Reemplazando la Ecuación 1.14 en la expresión [IV].

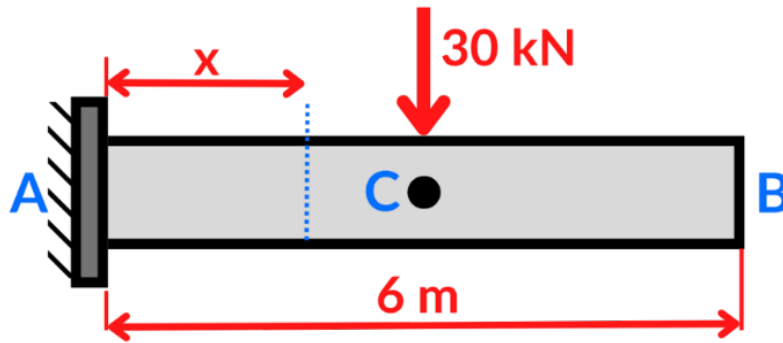
$$\Delta y_{BC} = -\frac{Pa^2}{2EI} (L - a) \quad [\text{V}]$$

La deflexión en B se determina mediante la suma de la deflexión en C con la expresión [V], mediante la Ecuación 1.16.

$$y_B = y_C + \Delta y_{BC}$$

$$y_B = y_{\max} = -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}(L - a) \quad (\text{Ec. 1.16})$$

**Ejemplo 1.2.** Una viga empotrada tiene una longitud de 6 m y una carga de 30 kN que actúa en la mitad de ella, como se muestra en la Figura 1.7. Determine la deflexión en la mitad de la viga, considere que la constante de rigidez  $EI = 6 \times 10^4 \text{ kN m}^2$ .



**Figura 1.7.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga puntual ubicada en un punto determinado.

### Datos

$$EI = 6 \times 10^4 \text{ kN m}^2$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$P = 30 \text{ kN}$$

### Resolución

Realizando un corte en el punto x hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 30(3 - x) = 0$$

$$M_x = 30(3 - x)$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -30(3 - x) \quad [\text{I}]$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = 15(3 - x)^2 + C_1 \quad [\text{II}]$$

$$EIy = -5(3 - x)^3 + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = 15(3 - 0)^2 + C_1$$

$$0 = 135 + C_1$$

$$C_1 = -135$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $C_1 = -135$  en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = -5(3 - 0)^3 - 135(0) + C_2$$

$$0 = -135 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 135$$

Substituyendo  $x = 3$ ,  $y = y_C$ ,  $C_1 = -135$ ,  $C_2 = 135$ ,  $EI = 6 \times 10^4$  en la expresión [III] se obtiene:

$$6 \times 10^4 y_C = -5(3 - 3)^3 - 135(3) + 135$$

$$6 \times 10^4 y_C = 0 - 405 + 135$$

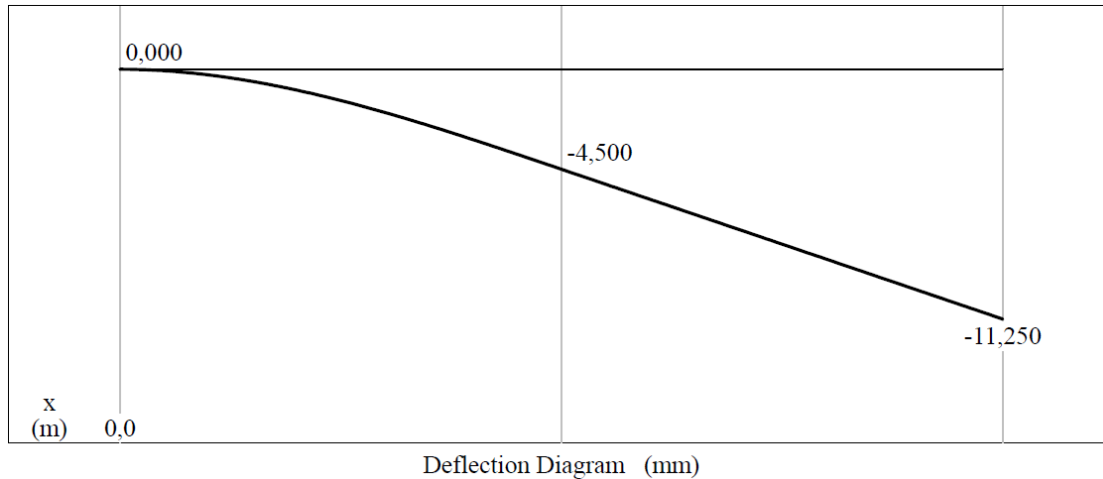
$$6 \times 10^4 y_C = -270$$

$$y_C = -\frac{270}{6 \times 10^4} = -0.0045 \text{ m} = -4.5 \text{ mm}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.15 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$y_C = -\frac{30(3)^3}{3(6 \times 10^4)} = -0.0045 \text{ m} = -4.5 \text{ mm}$$

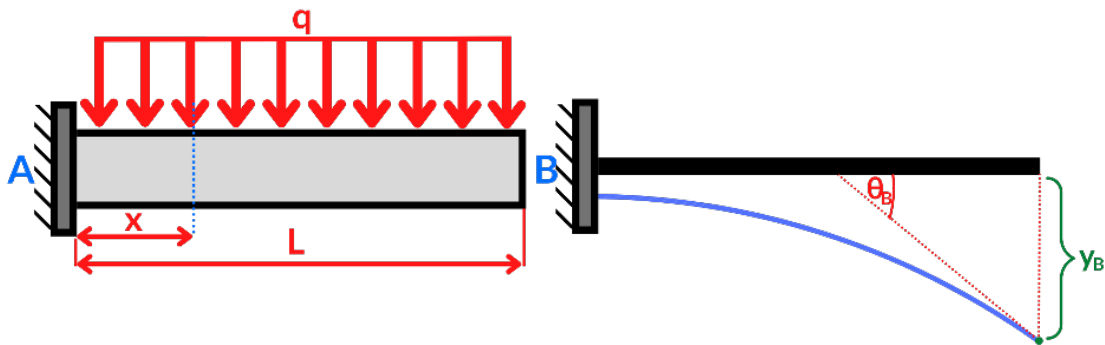
Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.8, siendo el valor de la deflexión coincidente con lo calculado.



**Figura 1.8. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga puntual ubicada en un punto determinado.**

### 1.4.3. Viga empotrada con carga distribuida rectangular completa

Se considera una viga empotrada en donde actúa una carga distribuida rectangular a lo largo de su longitud como se muestra en la Figura 1.9, al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.



**Figura 1.9. Viga empotrada con carga distribuida rectangular completa**

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - q(L - x) \frac{(L - x)}{2} = 0$$

$$M_x - \frac{q}{2}(L - x)^2 = 0$$

$$M_x = \frac{q}{2}(L - x)^2$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{2}(L - x)^2 \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{q}{2} \int (L - x)^2 dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{q}{6}(L - x)^3 + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{q}{6}(L - 0)^3 + C_1$$

$$0 = \frac{qL^3}{6} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{6}$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $\theta_B = \frac{dy}{dx}$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{6}$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.17:

$$EI\theta_B = \frac{q}{6}(L - L)^3 - \frac{qL^3}{6}$$

$$EI\theta_B = -\frac{qL^3}{6}$$



$$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI} \quad (\text{Ec. 1.17})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{q}{6} \int (L - x)^3 dx + C_1$$

$$EIy = -\frac{q}{24}(L - x)^4 + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{6}$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -\frac{q}{24}(L - 0)^4 - \frac{qL^3}{6}(0) + C_2$$

$$0 = -\frac{qL^4}{24} + C_2$$

$$C_2 = \frac{qL^4}{24}$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $y = y_B$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{6}$ ,  $C_2 = \frac{qL^4}{24}$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.18:

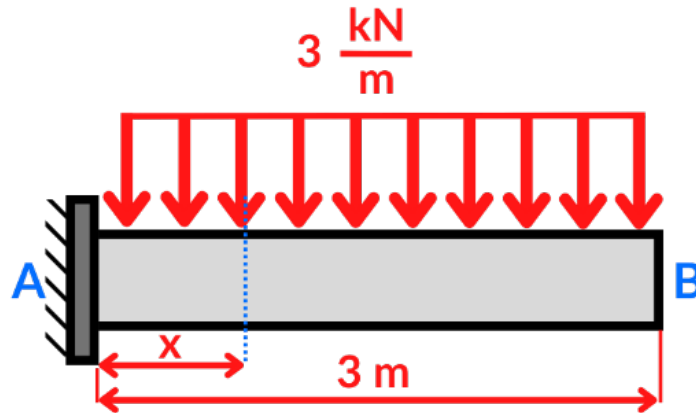
$$EIy_B = -\frac{q}{24}(L - L)^4 - \frac{qL^3}{6}(L) + \frac{qL^4}{24}$$

$$EIy_B = -\frac{qL^4}{6} + \frac{qL^4}{24}$$

$$EIy_B = -\frac{qL^4}{8}$$

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} \quad (\text{Ec. 1.18})$$

**Ejemplo 1.3.** Una viga empotrada tiene una longitud de 3 m y una carga distribuida de  $3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa sobre ella, como se muestra en la Figura 1.10. Determine la pendiente en el extremo libre de la viga, considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



**Figura 1.10.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga distribuida rectangular completa.

**Datos**

$$I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 65 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

**Resolución**

Realizando un corte en el punto  $x$  hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 3(3-x) \frac{(3-x)}{2} = 0$$

$$M_x = \frac{3}{2} (3-x)^2$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2}(3-x)^2 \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3-x)^3 + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{1}{2}(3-0)^3 + C_1$$

$$0 = \frac{27}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{27}{2}$$

Substituyendo  $x = 3$ ,  $C_1 = -\frac{27}{2}$ ,  $E = 200 \times 10^6$ ,  $I = 65 \times 10^{-6}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_B$  en la expresión [II] se obtiene:

$$(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6}) \theta_B = \frac{1}{2}(3-3)^3 - \frac{27}{2}$$

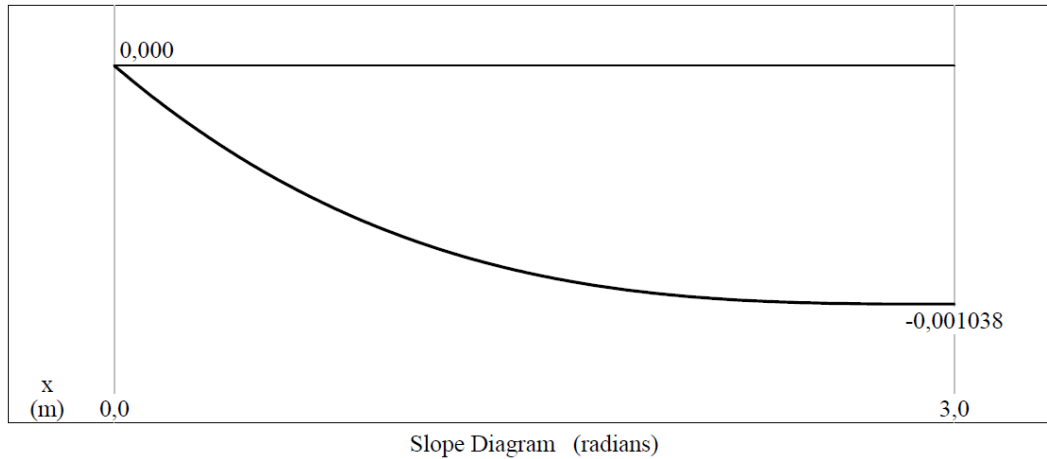
$$13000 \theta_B = 0 - \frac{27}{2}$$

$$\theta_B = -\frac{27}{2(13000)} = -0.001038 \text{ rad}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.17 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$\theta_B = -\frac{3(3)^3}{6(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6})} = -0.001039 \text{ rad}$$

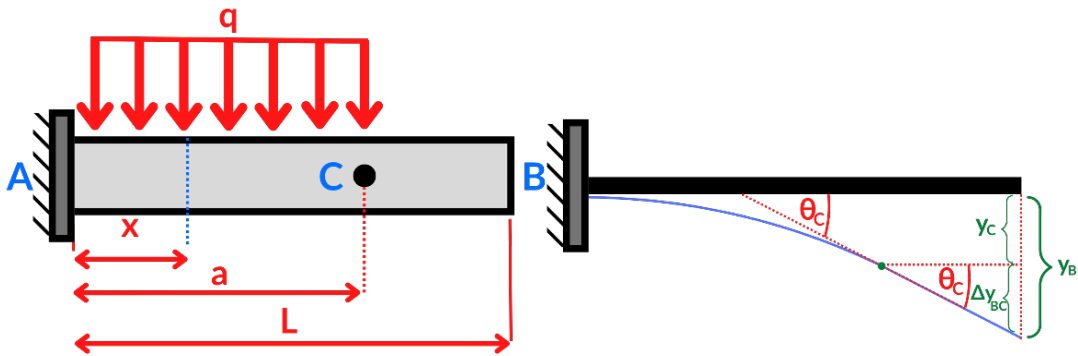
Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.11, siendo el valor de la pendiente coincidente con lo calculado.



**Figura 1.11. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida rectangular completa.**

#### 1.4.4. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde empotramiento

Se considera una viga empotrada en donde actúa una carga distribuida rectangular hasta una determinada distancia como se muestra en la Figura 1.12, al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.



**Figura 1.12. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde empotramiento**

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - q(a - x) \frac{(a - x)}{2} = 0$$

$$M_x - \frac{q(a - x)^2}{2} = 0$$

$$M_x = \frac{q(a-x)^2}{2}$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{2}(a-x)^2 \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{q}{2} \int (a-x)^2 dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{q}{6}(a-x)^3 + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{q}{6}(a-0)^3 + C_1$$

$$0 = \frac{qa^3}{6} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qa^3}{6}$$

En la condición de frontera donde se aplica la carga distribuida hasta el punto C, sustituyendo cuando  $x = a$ ,  $\theta_C = \frac{dy}{dx}$ ,  $C_1 = -\frac{qa^3}{6}$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.19:

$$EI\theta_C = \frac{q}{6}(a-a)^3 - \frac{qa^3}{6}$$

$$EI\theta_C = -\frac{qa^3}{6}$$

$$\theta_C = -\frac{qa^3}{6EI} \quad (\text{Ec. 1.19})$$

Para los casos donde se aplica la carga en algún punto de la viga, desde esa ubicación en adelante la pendiente se mantendrá constante, de manera que la pendiente de C a B se expresa con la Ecuación 1.20.

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{qa^3}{6EI} \quad (\text{Ec. 1.20})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{q}{6} \int (a-x)^3 dx + C_1$$

$$Ely = -\frac{q}{24}(a-x)^4 + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $C_1 = -\frac{qa^3}{6}$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -\frac{q}{24}(a-0)^4 - \frac{qa^3}{6}(0) + C_2$$

$$0 = -\frac{qa^4}{24} + C_2$$

$$C_2 = \frac{qa^4}{24}$$

En la condición de frontera donde se extiende la carga distribuida en el punto C, sustituyendo cuando  $x = a$ ,  $y = y_C$ ,  $C_1 = -\frac{qa^3}{6}$ ,  $C_2 = \frac{qa^4}{24}$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.21:

$$Ely_C = -\frac{q}{24}(a-a)^4 - \frac{qa^3}{6}(a) + \frac{qa^4}{24}$$

$$Ely_C = -\frac{qa^4}{6} + \frac{qa^4}{24}$$

$$Ely_C = -\frac{qa^4}{8}$$

$$y_C = -\frac{qa^4}{8EI} \quad (\text{Ec. 1.21})$$

Para determinar la deflexión en el punto B se debe considerar el tramo  $\Delta y_{BC}$ , empleando las condiciones indicadas en el caso de viga empotrada con carga puntual en un punto determinado, obteniéndose:

$$\Delta y_{BC} = \theta_C(L - a) \quad [IV]$$

Reemplazando la Ecuación 1.17 en la expresión [IV].

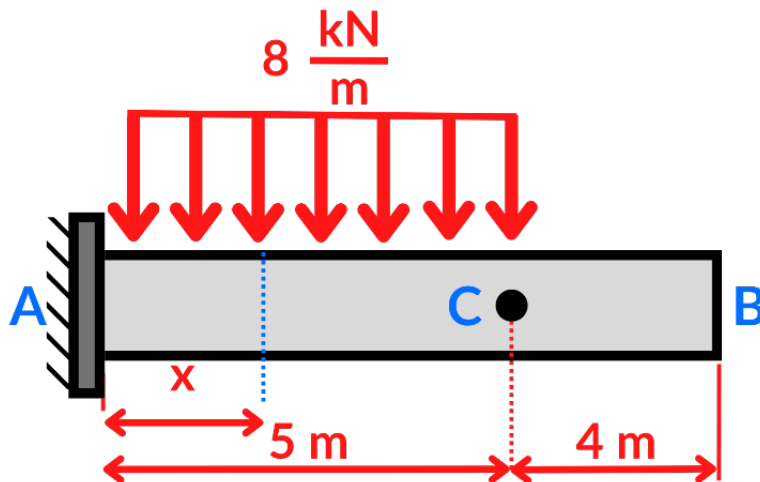
$$\Delta y_{BC} = -\frac{qa^3}{6EI}(L - a) \quad [V]$$

La deflexión en B se determina mediante la suma de la deflexión en C con la expresión [V], obteniéndose la Ecuación 1.22.

$$y_B = y_C + \Delta y_{BC}$$

$$y_B = -\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^3}{6EI}(L - a) \quad (\text{Ec. 1.22})$$

**Ejemplo 1.4.** Una viga empotrada tiene una longitud de 9 m y una carga distribuida de  $8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa hasta 5 m del lado empotrado, como se muestra en la Figura 1.13. Determine la pendiente en el punto C, considere que la constante de rigidez EI es constante.



**Figura 1.13.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde empotramiento.

### Datos

$$L = 9 \text{ m}$$

$$q = 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

Realizando un corte en el punto  $x$  hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 8(5-x) \frac{(5-x)}{2} = 0$$

$$M_x = 4(5-x)^2$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -4(5-x)^2 \quad [\text{I}]$$

Integrando la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(5-x)^3 + C_1 \quad [\text{II}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{4}{3}(5-0)^3 + C_1$$

$$0 = \frac{500}{3} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{500}{3}$$



Substituyendo  $x = 5$ ,  $C_1 = -\frac{500}{3}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_C$  en la expresión [II] se obtiene:

$$EI\theta_C = \frac{4}{3}(5 - 5)^3 - \frac{500}{3}$$

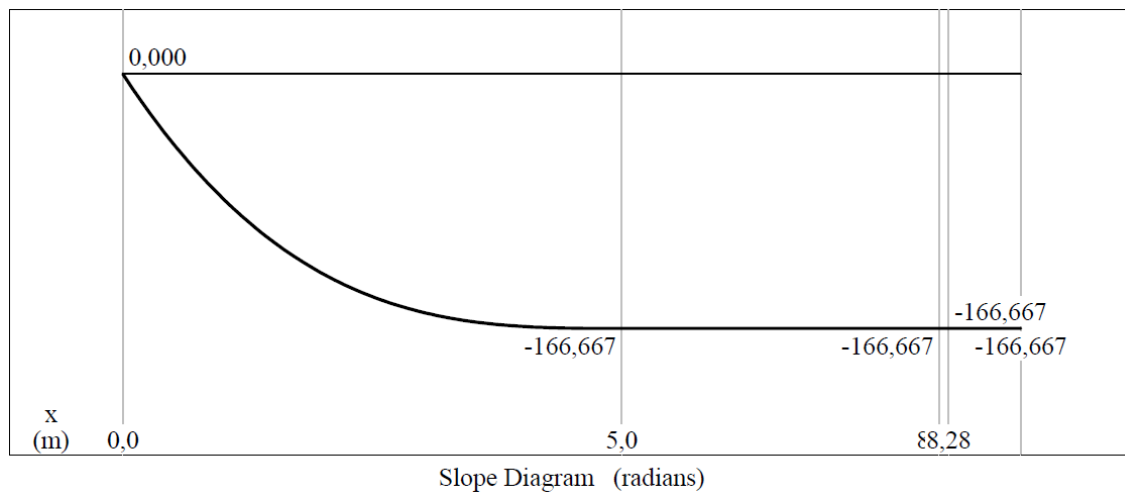
$$EI\theta_C = -\frac{500}{3}$$

$$\theta_C = -\frac{500}{3EI} = -\frac{166.67}{EI}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.20 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$\theta_C = -\frac{(8)(5)^3}{6EI} = -\frac{166.67}{EI}$$

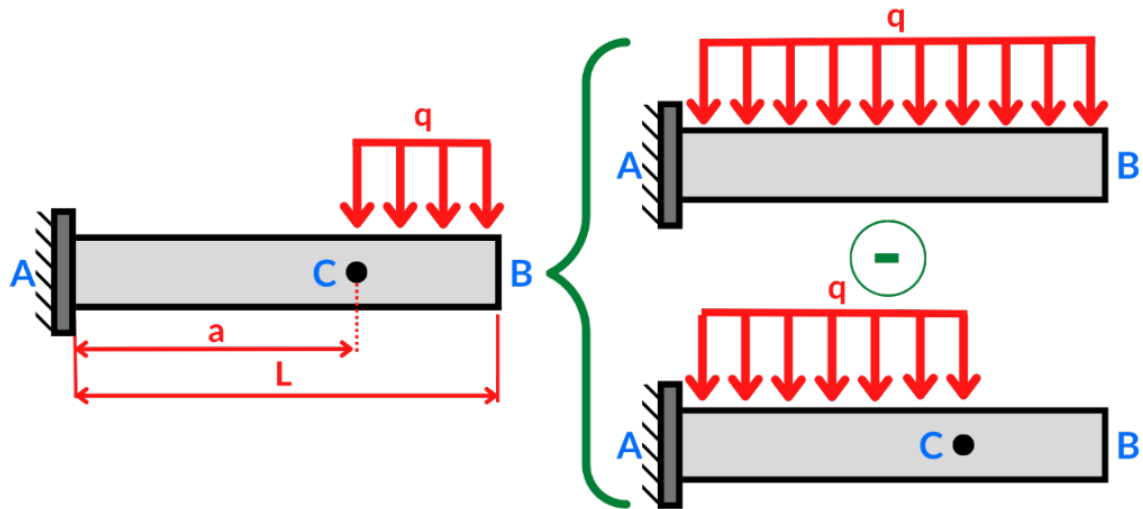
Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.14, siendo el valor de la pendiente coincidente con lo calculado.



**Figura 1.14. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde empotramiento.**

#### 1.4.5. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre

Se considera una viga empotrada en donde actúa una carga distribuida rectangular desde cierta ubicación de la viga hasta el extremo libre como se muestra en la Figura 1.15, es relevante destacar que relacionando los casos que se han abordado anteriormente es posible determinar los parámetros de deflexiones y pendientes.



**Figura 1.15. Viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre**

Este caso puede ser formulado de las diferencias de las deflexiones y pendientes de los apartados 1.4.3 y 1.4.4. La pendiente en el punto B se expresa mediante la Ecuación 1.23.

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI} - \left(-\frac{qa^3}{6EI}\right)$$

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI} + \frac{qa^3}{6EI}$$

$$\theta_B = -\frac{q}{6EI}(L^3 - a^3) \quad (\text{Ec. 1.23})$$

Mientras que la deflexión en el punto B se determina mediante la Ecuación 24.

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} - \left(-\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^3}{6EI}(L - a)\right)$$

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} - \left(-\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^3L}{6EI} + \frac{qa^4}{6EI}\right)$$

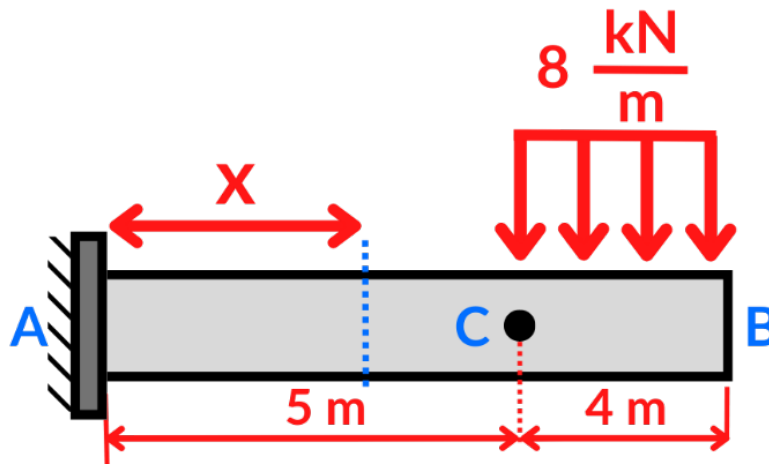
$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} + \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^3L}{6EI} - \frac{qa^4}{6EI}$$

$$y_B = \frac{-3qL^4 + 3qa^4 + 4a^3L - 4qa^4}{24EI}$$

$$y_B = \frac{-3qL^4 + 4a^3L - qa^4}{24EI}$$

$$y_B = -\frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4) \quad (\text{Ec. 1.24})$$

**Ejemplo 1.5.** Una viga empotrada tiene una longitud de 9 m y una carga distribuida de  $8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa desde los 5 m del lado empotrado hasta el extremo libre, como se muestra en la Figura 1.16. Determine la deflexión y la pendiente en el punto C, considere que EI es constante.



**Figura 1.16.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre.

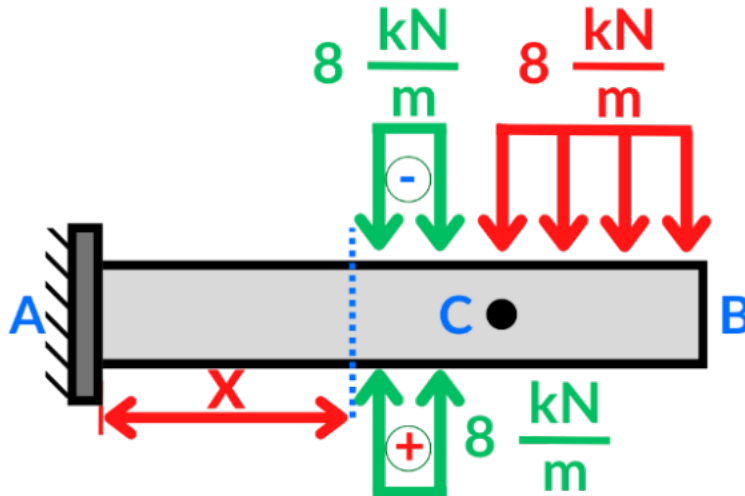
### Datos

$$L = 9 \text{ m}$$

$$q = 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

En este caso particular es necesario aplicar un ajuste a la condición de carga distribuida para que el corte en el punto x hacia la derecha pueda permitirse completarse de manera que sea continua la carga. Para esto se añaden dos condiciones de cargas distribuidas opuestas y equivalentes a la original en el tramo faltante como se muestra en la Figura 1.17.



**Figura 1.17. Arreglo de carga en viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre.**

Realizando un corte en el punto  $x$  hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 8(9-x) \frac{(9-x)}{2} + 8(5-x) \frac{(5-x)}{2} = 0$$

$$M_x - 4(9-x)^2 + 4(5-x)^2 = 0$$

$$M_x = 4(9-x)^2 - 4(5-x)^2$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -4(9-x)^2 + 4(5-x)^2 \quad [I]$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(9-x)^3 - \frac{4}{3}(5-x)^3 + C_1 \quad [II]$$

$$EIy = -\frac{1}{3}(9-x)^4 + \frac{1}{3}(5-x)^4 + C_1x + C_2 \quad [III]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{4}{3} (9 - 0)^3 - \frac{4}{3} (5 - 0)^3 + C_1$$

$$0 = 972 - \frac{500}{3} + C_1$$

$$0 = \frac{2416}{3} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{2416}{3}$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = -\frac{1}{3} (9 - 0)^4 + \frac{1}{3} (5 - 0)^4 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = -2187 + \frac{625}{3} + C_2$$

$$0 = -\frac{5936}{3} + C_2$$

$$C_2 = \frac{5936}{3}$$

Substituyendo  $C_1 = -\frac{2416}{3}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_c$ ,  $x = 5$  en la expresión [II] se obtiene:

$$EI\theta_c = \frac{4}{3} (9 - 5)^3 - \frac{4}{3} (5 - 5)^3 - \frac{2416}{3}$$

$$EI\theta_c = \frac{256}{3} - 0 - \frac{2416}{3}$$

$$EI\theta_c = -720$$

$$\theta_c = -\frac{720}{EI}$$

Substituyendo  $x = 5$ ,  $C_1 = -\frac{2416}{3}$ ,  $C_2 = \frac{5936}{3}$  en la expresión [III] se obtiene:

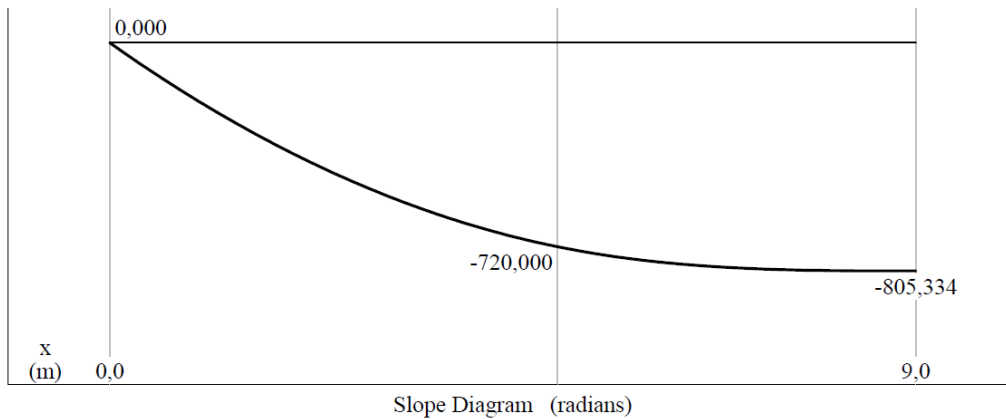
$$Ely = -\frac{1}{3} (9 - 5)^4 + \frac{1}{3} (5 - 5)^4 - \frac{2416}{3} (5) + \frac{5936}{3}$$

$$Ely = -\frac{256}{3} + 0 - \frac{12080}{3} + \frac{5936}{3}$$

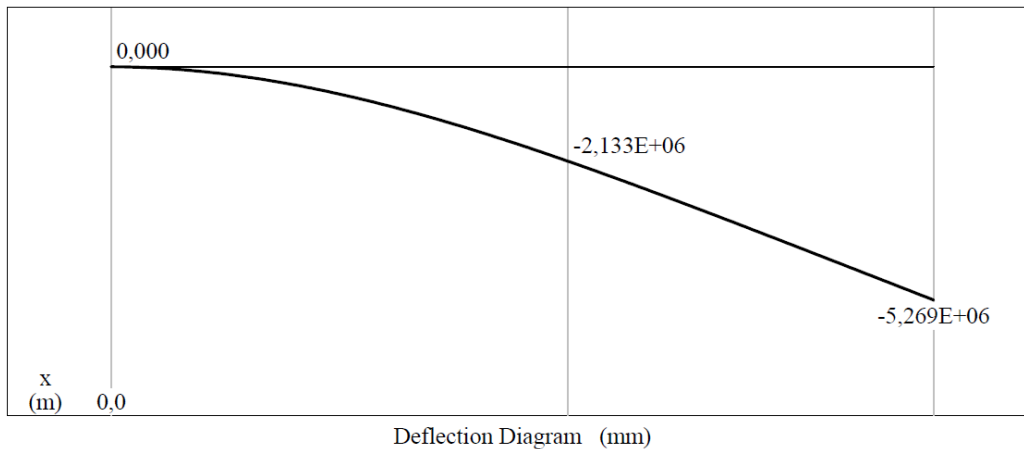
$$Ely = -\frac{6400}{3}$$

$$y = -\frac{6400}{3EI} = -\frac{2133.33 \text{ m}}{EI} = -\frac{2133333.33 \text{ mm}}{EI}$$

Para la comprobación del resultado se emplea el software MDSolids para validar el procedimiento como se observa en la Figura 1.18 y 1.19, siendo el valor de la pendiente coincidente con lo calculado.



**Figura 1.18. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre (pendiente).**



**Figura 1.19. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida rectangular parcial desde extremo libre (deflexión).**

### 1.4.6. Viga empotrada con momento en el extremo

Se considera una viga empotrada en donde actúa un momento en su extremo como se muestra en la Figura 1.20, al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.

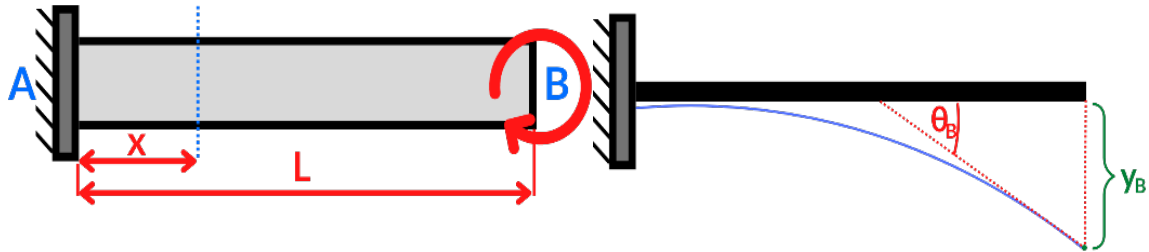


Figura 1.20. Viga empotrada con momento en el extremo

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - M = 0$$

$$M_x = M$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = - \int M dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -Mx + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = -M(0) + C_1$$

$$0 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_B$ ,  $C_1 = 0$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.25:

$$EI\theta_B = -M(L) + 0$$

$$EI\theta_B = -ML$$

$$\theta_B = -\frac{ML}{EI} \quad (\text{Ec. 1.25})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = -M \int x dx + C_1 \int dx$$

$$EIy = -\frac{Mx^2}{2} + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -\frac{M(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $y = y_B$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.26:

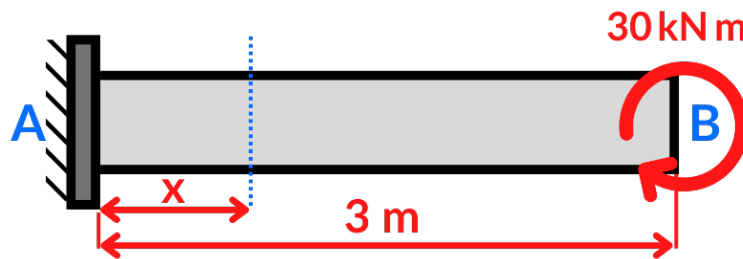
$$EIy_B = -\frac{ML^2}{2} + (0)L + 0$$

$$EIy_B = -\frac{ML^2}{2}$$

$$y_B = -\frac{ML^2}{2EI} \quad (\text{Ec. 1.26})$$



**Ejemplo 1.6.** Una viga empotrada tiene una longitud de 3 m y un momento de 30 kN m que actúa en su extremo, como se muestra en la Figura 1.21. Determine la deflexión máxima, considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



**Figura 1.21.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con momento en el extremo.

**Datos**

$$I = 65 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 65 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$M = 30 \text{ kN m}$$

**Resolución**

Realizando un corte en el punto x hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 30 = 0$$

$$M_x = 30$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -30$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = -30x + C_1 \quad \text{[II]}$$

$$EIy = -15x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{[III]}$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = -30(0) + C_1$$

$$0 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = -15(0)^2 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Substituyendo  $x = 3$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $E = 200 \times 10^6$ ,  $I = 65 \times 10^{-6}$  en la expresión [III] se obtiene:

$$(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6})y = -15(3)^2 + 0(3) + 0$$

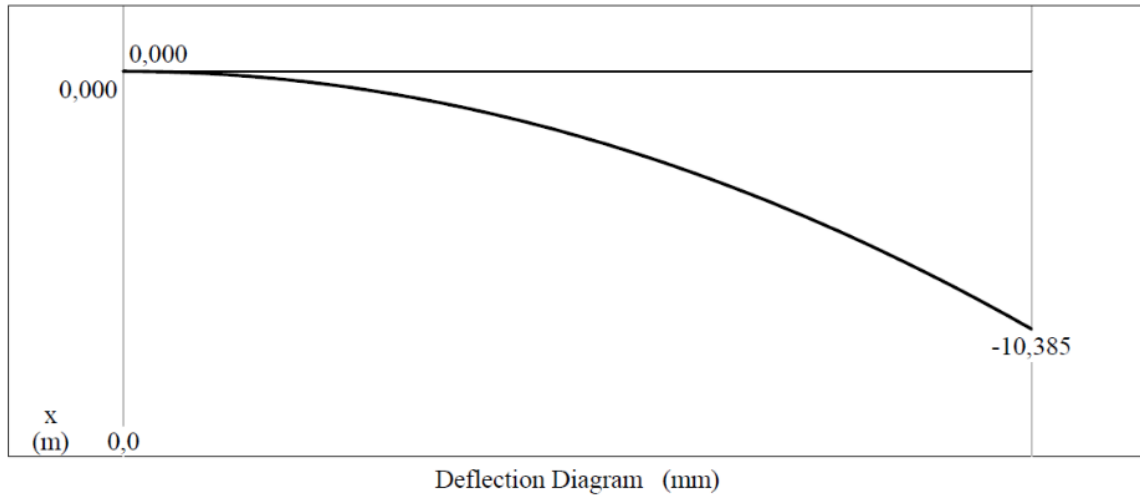
$$13000y = -135$$

$$y = -\frac{135}{13000} = 0.01038 \text{ m} = -10.38 \text{ mm}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.12 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$y_B = -\frac{30(3)^2}{2(200 \times 10^6)(65 \times 10^{-6})} = -0.01038 \text{ m} = -10.38 \text{ mm}$$

Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.22, siendo el valor de la deflexión coincidente con lo calculado.



**Figura 1.22. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con momento en el extremo**

#### 1.4.7. Viga empotrada con carga distribuida triangular decreciente total

Se considera una viga en voladizo con carga distribuida triangular decreciente ubicada a lo largo de su longitud como se muestra en la Figura 1.23, la relación geométrica de la carga triangular se puede identificar la siguiente igualdad en función de su pendiente.

$$(\tan \alpha)_{\text{triángulo menor}} = (\tan \alpha)_{\text{triángulo mayor}}$$

$$\frac{q_x}{L - x} = \frac{q}{L}$$

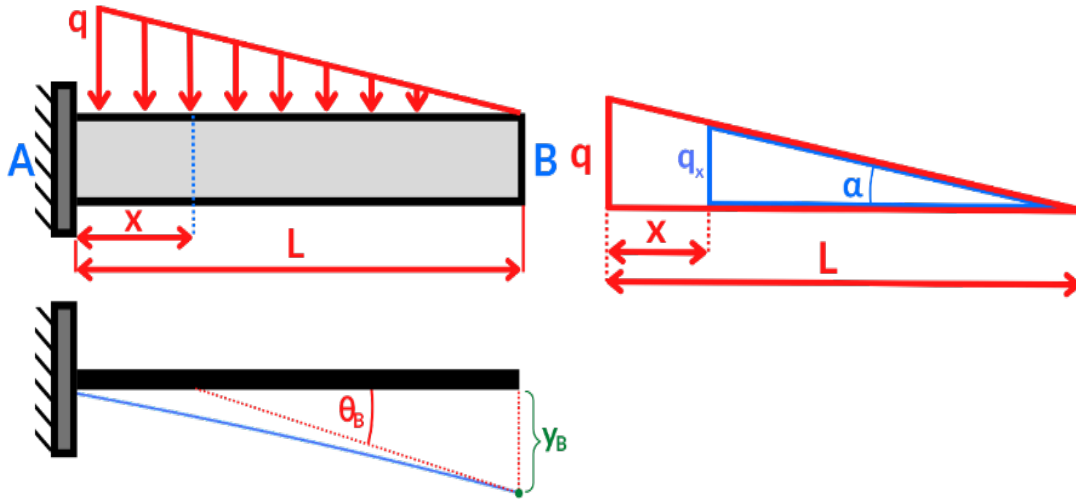
$$q_x = \frac{q(L - x)}{L}$$

Analizando mediante la estática el momento en el punto x se tiene:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - \frac{q(L - x)}{L} \left( \frac{L - x}{2} \right) \left( \frac{L - x}{3} \right) = 0$$

$$M_x = \frac{q(L - x)^3}{6L}$$



**Figura 1.23. Viga empotrada con carga distribuida triangular decreciente total**

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{6L}(L-x)^3 \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{q}{6L} \int (L-x)^3 dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{q}{24L}(L-x)^4 + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{q}{24L}(L-0)^4 + C_1$$

$$0 = \frac{qL^4}{24L} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_B$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.27:

$$EI\theta_B = \frac{q}{24L}(L-L)^4 - \frac{qL^3}{24}$$

$$EI\theta_B = 0 - \frac{qL^3}{24}$$

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (\text{Ec. 1.27})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{q}{24L} \int (L-x)^4 dx + C_1$$

$$EIy = -\frac{q}{120L}(L-x)^5 + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$  en la expresión [III]

$$EI(0) = -\frac{q}{120L}(L-0)^5 - \frac{qL^3}{24}(0) + C_2$$

$$0 = -\frac{qL^5}{120L} + C_2$$

$$0 = -\frac{qL^4}{120} + C_2$$

$$C_2 = \frac{qL^4}{120}$$

En la condición de frontera para el extremo libre en el punto B, sustituyendo cuando  $x = L$ ,  $y = y_B$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$ ,  $C_2 = \frac{qL^4}{120}$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.28:

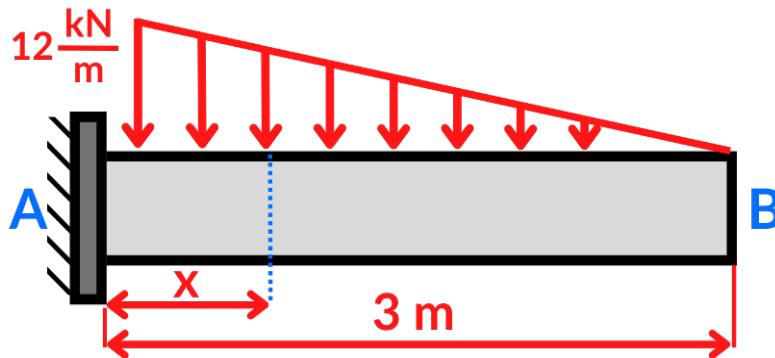
$$EIy_B = -\frac{q(L-L)^5}{120L} - \frac{qL^3}{24}(L) + \frac{qL^4}{120}$$

$$EIy_B = -\frac{qL^4}{24} + \frac{qL^4}{120}$$

$$EIy_B = -\frac{qL^4}{30}$$

$$y_B = -\frac{qL^4}{30EI} \quad (\text{Ec. 1.28})$$

**Ejemplo 1.7.** Una viga empotrada tiene una longitud de 3 m y una carga triangular decreciente de  $12 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa sobre ella, como se muestra en la Figura 1.24. Determine la pendiente en el extremo libre, considere que EI es constante.



**Figura 1.24.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga distribuida triangular decreciente total.

### Datos

$$L = 3 \text{ m}$$

$$q = 12 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

Relacionando geoméricamente la distribución de cargas triangulares se tiene:

$$(\tan \alpha)_{\text{triángulo menor}} = (\tan \alpha)_{\text{triángulo mayor}}$$

$$\frac{q_x}{3-x} = \frac{12}{3}$$

$$q_x = 4(3-x)$$

Realizando un corte en el punto x hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 4(3 - x) \left( \frac{3 - x}{2} \right) \left( \frac{3 - x}{3} \right) = 0$$

$$M_x = \frac{2}{3} (3 - x)^3$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3} (3 - x)^3 \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} (3 - x)^4 + C_1 \quad [II]$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{1}{6} (3 - 0)^4 + C_1$$

$$0 = \frac{27}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{27}{2}$$

Substituyendo  $x = 3$ ,  $C_1 = -\frac{27}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_B$  en la expresión [II] se obtiene:

$$EI\theta_B = \frac{1}{6} (3 - 3)^4 - \frac{27}{2}$$

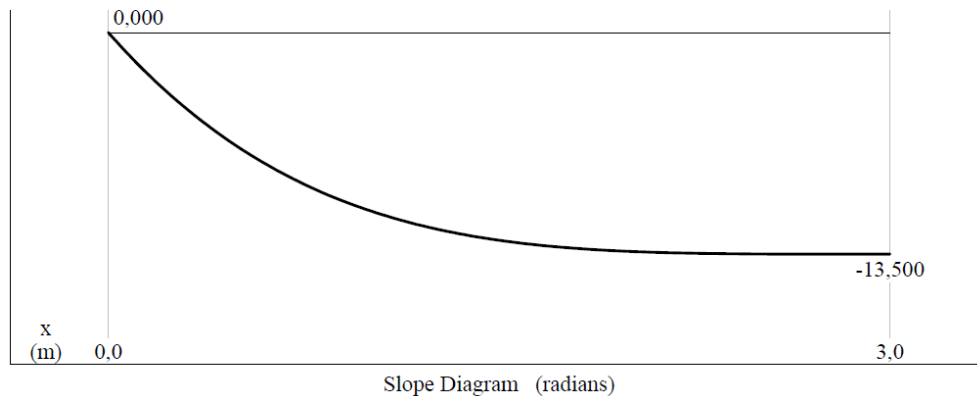
$$EI\theta_B = 0 - \frac{27}{2}$$

$$\theta_B = -\frac{27}{2} = -\frac{13.5}{EI}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.27 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI} = -\frac{12(3)^3}{24EI} = -\frac{13.5}{EI}$$

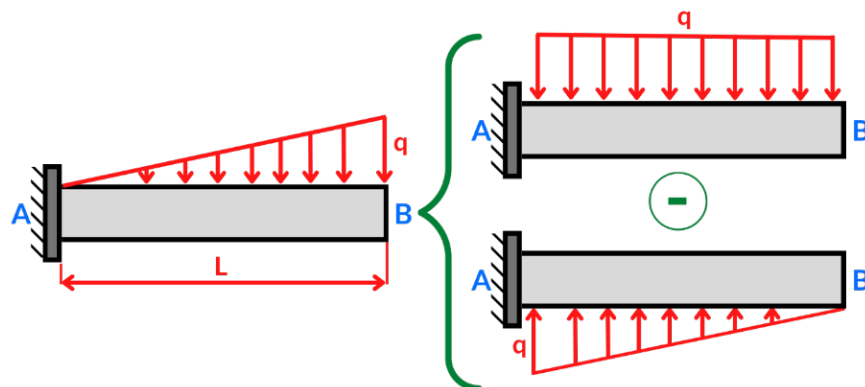
Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.25, siendo el valor de la pendiente coincidente con lo calculado.



**Figura 1.25. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida triangular decreciente total.**

#### 1.4.8. Viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total

Se considera una viga en voladizo con carga distribuida triangular creciente ubicada a lo largo de su longitud como se muestra en la Figura 1.26, es relevante destacar que relacionando los casos que se han abordado anteriormente es posible determinar los parámetros de deflexiones y pendientes.



**Figura 1.26. Viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total**



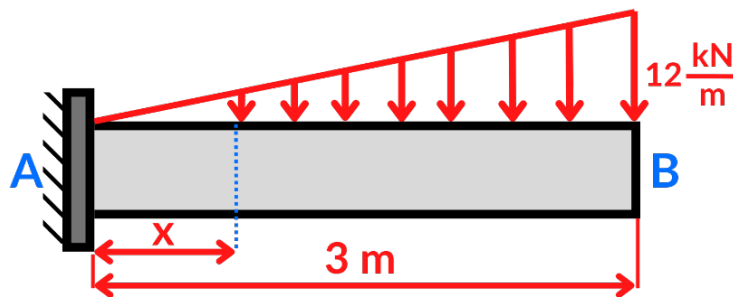
Este caso puede ser formulado de las diferencias de las deflexiones del apartado 1.4.3 y 1.4.7 (carga invertida). La deflexión en el punto B se expresa mediante la Ecuación 1.29.

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} - \left(-\frac{qL^4}{30EI}\right)$$

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^4}{30EI}$$

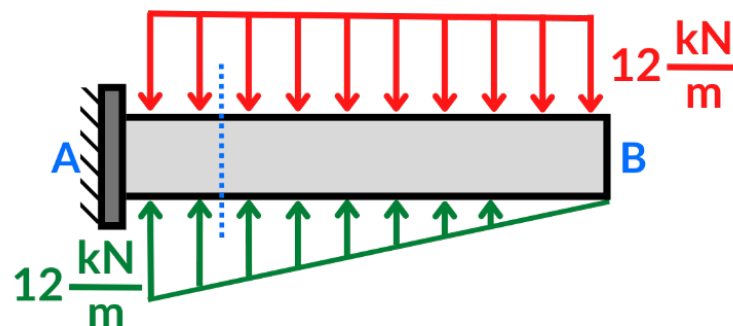
$$y_B = -\frac{11qL^4}{120EI} \quad (\text{Ec. 1.29})$$

**Ejemplo 1.8.** Una viga empotrada tiene una longitud de 3 m y una carga triangular creciente de  $12 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa sobre ella, como se muestra en la Figura 1.27. Determine la deflexión en el extremo libre, considere que la constante de rigidez EI.



**Figura 1.27.** Aplicación de M.D.I. en viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total.

En este caso particular es necesario aplicar un ajuste a la condición de carga distribuida equivalente, se considera una carga distribuida hacia abajo y una carga decreciente hacia arriba, de manera que corresponda al caso original de la viga del ejercicio como se muestra en la Figura 1.28.



**Figura 1.28.** Arreglo de carga en viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total.

Relacionando geoméricamente la distribución de cargas triangulares hacia arriba se tiene:

$$(\tan \alpha)_{\text{triángulo menor}} = (\tan \alpha)_{\text{triángulo mayor}}$$

$$\frac{q_x}{3-x} = \frac{12}{3}$$

$$q_x = 4(3-x)$$

Realizando un corte en el punto x hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 12(3-x) \frac{(3-x)}{2} + 4(3-x) \left( \frac{3-x}{2} \right) \left( \frac{3-x}{3} \right) = 0$$

$$M_x - 6(3-x)^2 + \frac{2}{3}(3-x)^3 = 0$$

$$M_x = 6(3-x)^2 - \frac{2}{3}(3-x)^3$$

Observando que la viga al deformarse se produce tracción en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es negativo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -6(3-x)^2 + \frac{2}{3}(3-x)^3 \quad \text{[I]}$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = 2(3-x)^3 - \frac{1}{6}(3-x)^4 + C_1 \quad \text{[II]}$$

$$EI y = -\frac{1}{2}(3-x)^4 + \frac{1}{30}(3-x)^5 + C_1 x + C_2 \quad \text{[III]}$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = 2(3-0)^3 - \frac{1}{6}(3-0)^4 + C_1$$

$$0 = 54 - \frac{27}{2} + C_1$$

$$0 = \frac{81}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{81}{2}$$

En la condición de frontera para el empotramiento del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = -\frac{1}{2}(3-0)^4 + \frac{1}{30}(3-0)^5 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = -\frac{81}{2} + \frac{81}{10} + C_2$$

$$0 = -\frac{162}{5} + C_2$$

$$C_2 = \frac{162}{5}$$

Substituyendo  $x = 3$ ,  $C_1 = -\frac{81}{2}$ ,  $C_2 = \frac{162}{5}$  en la expresión [III] se obtiene:

$$EIy = -\frac{1}{2}(3-3)^4 + \frac{1}{30}(3-3)^5 - \frac{81}{2}(3) + \frac{162}{5}$$

$$EIy = -\frac{243}{2} + \frac{162}{5}$$

$$y = -\frac{891}{10EI} = -\frac{89.1}{EI}$$

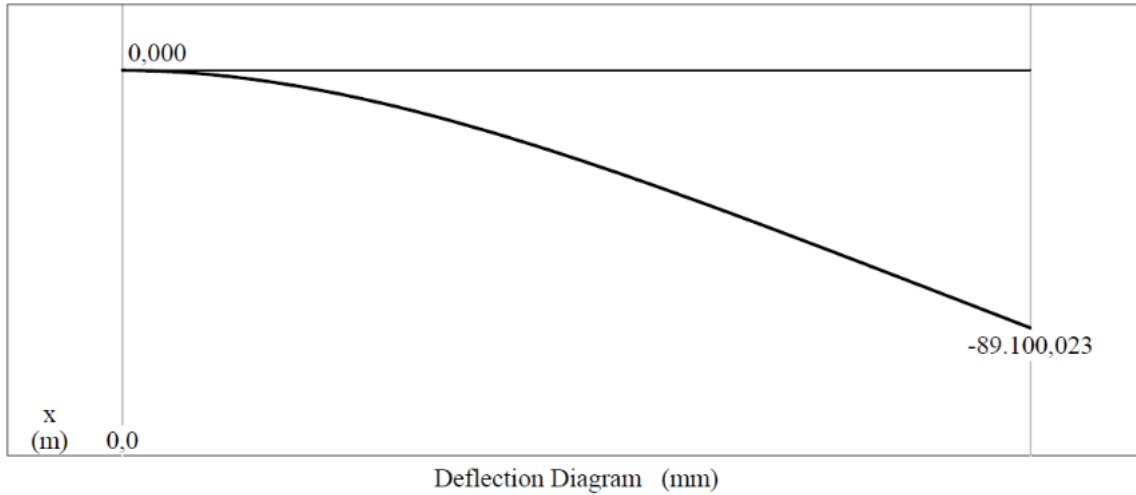
Multiplicando el valor por 1000 para convertirlo en mm.

$$y = -\frac{89.1}{EI}(1000) = -\frac{89100}{EI}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.29 y multiplicándolo para 1000 para convertirlo en mm, se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$y_B = -\frac{11(12)(3)^4}{120EI} = -\frac{89.1}{EI}(1000) = -\frac{89100}{EI}$$

Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.29, siendo el valor de la deflexión coincidente con lo calculado.

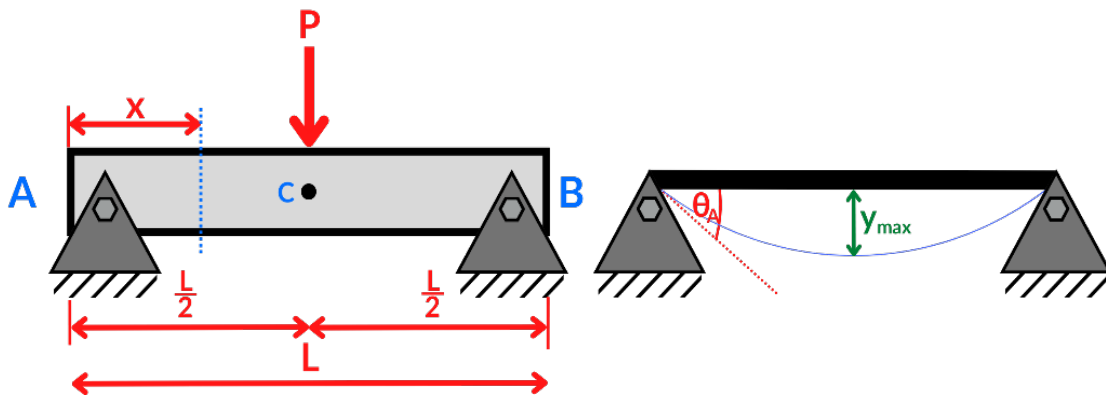


**Figura 1.29. Comprobación mediante MDSolids de viga empotrada con carga distribuida triangular creciente total.**

#### 1.4.9. Viga apoyada en los extremos con carga puntual ubicada en el centro

Se considera una viga apoyada en los extremos en donde actúa una carga puntual en la mitad de su longitud como se muestra en la Figura 1.30, siendo correspondiente a este caso que las reacciones en cada apoyo son iguales a la mitad de la carga aplicada.

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$



**Figura 1.30. Viga apoyada en los extremos con carga puntual ubicada en el centro**

Por lo que al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - \frac{Px}{2} = 0$$

$$M_x = \frac{Px}{2}$$

Observando que la viga al deformarse se produce compresión en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es positivo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2} \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{P}{2} \int x dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} + C_1 \quad [II]$$

En las vigas apoyadas en los extremos cuando se produce la condición de deflexión máxima la pendiente es nula, sustituyendo cuando  $x = \frac{L}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{4} + C_1$$

$$0 = \frac{PL^2}{16} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

En la condición de frontera en el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_A$ ,  $C_1 = -\frac{PL^2}{16}$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.30:

$$EI\theta_A = \frac{P(0)^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

$$EI\theta_A = 0 - \frac{PL^2}{16}$$

$$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI} \quad (\text{Ec. 1.30})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{P}{4} \int x^2 dx + C_1 \int dx$$

$$EIy = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 \quad [\text{III}]$$

En la condición de frontera en el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0, y = 0$ ,  $C_1 = -\frac{PL^2}{16}$  en la expresión [III]

$$EI(0) = \frac{P(0)^3}{12} - \frac{PL^2}{16}(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera en la mitad de la viga, sustituyendo cuando  $x = \frac{L}{2}, y = y_C$ ,  $C_1 = -\frac{PL^2}{16}, C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 31:

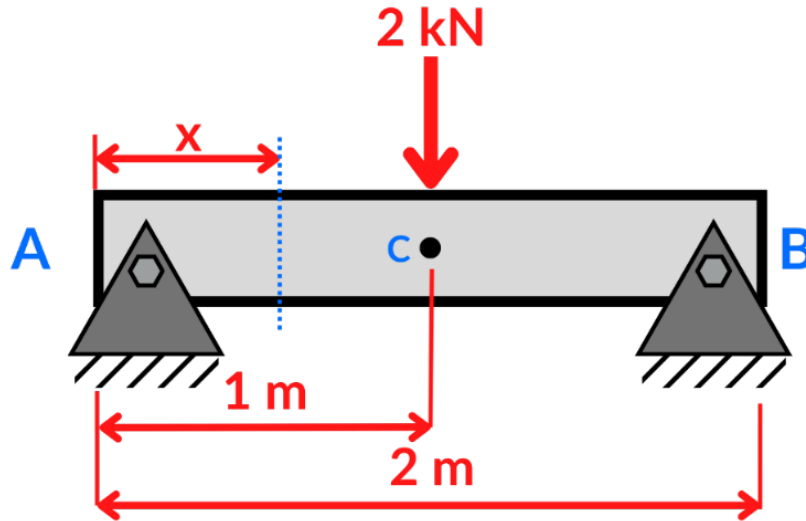
$$EIy_C = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{12} - \frac{PL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right) + 0$$

$$EIy_C = \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32}$$

$$EIy_C = -\frac{PL^3}{48}$$

$$y_C = y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (\text{Ec. 1.31})$$

**Ejemplo 1. 9.** Determine la pendiente en el punto A de una viga apoyada en los extremos que tiene una longitud de 2 m y una carga puntual de 2 kN que actúa sobre ella, como se muestra en la Figura 1.31. Considere que el material de la viga es de acero ( $E = 210 \text{ GPa}$ ), con una sección cuadrada de 45 mm por cada lado.



**Figura 1.31.** Aplicación de M.D.I. en viga apoyada en los extremos con carga puntual ubicada en el centro.

**Datos**

$$E = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$b = h = 45 \text{ mm} = 0.045 \text{ m}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$P = 2 \text{ kN}$$

**Resolución**

Se calcula el momento de inercia de la sección cuadrada mediante la siguiente expresión:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.045 \text{ m})(0.045 \text{ m})^3}{12} = 3.417 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-2 \text{ kN}(1 \text{ m}) + R_B(2 \text{ m}) = 0$$

$$-2 \text{ kN m} + R_B(2 \text{ m}) = 0$$

$$R_B(2 \text{ m}) = 2 \text{ kN m}$$

$$R_B = \frac{2 \text{ kNm}}{2 \text{ m}} = 1 \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto  $x$  hacia la derecha se puede obtener el momento interno de la siguiente manera:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 2(1 - x) + 1(2 - x) = 0$$

$$M_x = 2(1 - x) - (2 - x)$$

Observando que la viga al deformarse se produce compresión en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es positivo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 2(1 - x) - (2 - x) \quad \text{[I]}$$

Integrando la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = -(1 - x)^2 + \frac{1}{2}(2 - x)^2 + C_1 \quad \text{[II]}$$

En la condición de frontera en el centro de la viga, sustituyendo cuando  $x = 1$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = -(1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(2 - 1)^2 + C_1$$

$$0 = 0 + \frac{1}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}$$



Substituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_A$ ,  $C_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $E = 210 \times 10^6$ ,  $I = 3.417 \times 10^{-7}$  en la expresión [II] se obtiene:

$$EI\theta_A = - (1 - 0)^2 + \frac{1}{2}(2 - 0)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(210 \times 10^6)(3.417 \times 10^{-7})\theta_A = -1 + 2 - \frac{1}{2}$$

$$71.76\theta_A = \frac{1}{2}$$

$$\theta_A = \frac{1}{2(71.76)} = 0.00697 \text{ rad}$$

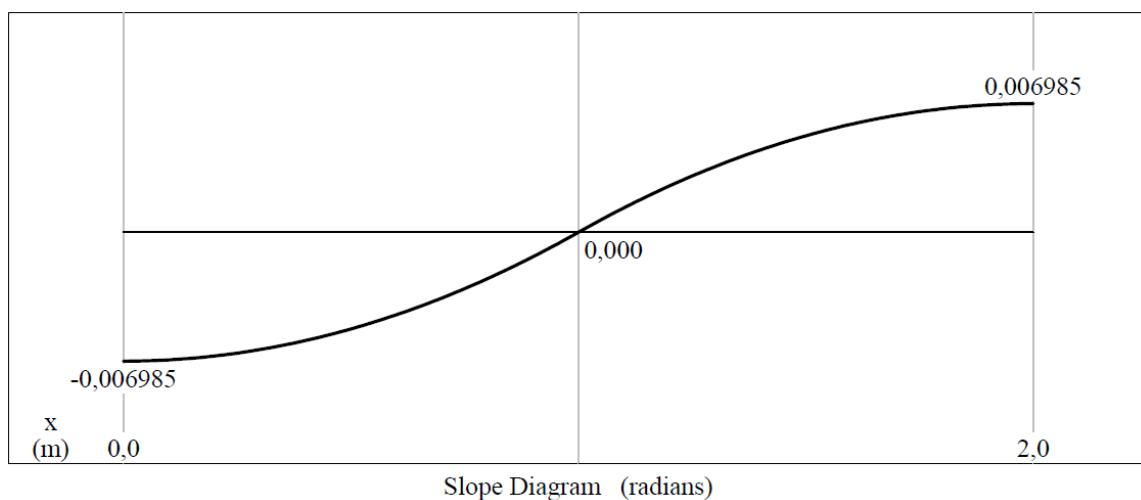
Como la pendiente se mide en sentido horario desde el eje x la pendiente en A es negativa siendo:

$$\theta_A = -0.00697 \text{ rad}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.30 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$\theta_A = -\frac{2(2)^2}{16(210 \times 10^6)(3.417 \times 10^{-7})} = 0.00697 \text{ rad}$$

Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.32, siendo el valor de la pendiente coincidente con lo calculado.

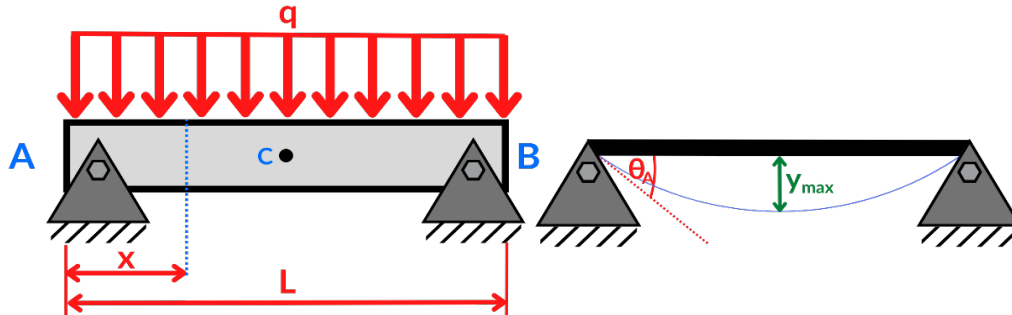


**Figura 1.32. Comprobación mediante MDSolids de viga apoyada en los extremos con carga puntual ubicada en el centro.**

#### 1.4.10. Viga apoyada en los extremos con carga distribuida rectangular completa

Se considera una viga apoyada en los extremos en donde actúa una carga distribuida a lo largo de su longitud como se muestra en la Figura 1.33, siendo correspondiente a este caso que las reacciones en cada apoyo son iguales a la mitad del producto de la carga distribuida por su longitud.

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$



**Figura 1.33. Viga apoyada en los extremos con carga distribuida rectangular completa**

Por lo que al realizar un corte a una distancia  $x$  se puede determinar estáticamente su momento interno.

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - \frac{qL}{2}(x) + qx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M_x = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Observando que la viga al deformarse se produce compresión en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es positivo. Sustituyendo este momento en la Ecuación 1.8, se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad [I]$$

Integrando la expresión [I] con respecto a  $x$ , se tiene que:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{qL}{2} \int x dx - \frac{q}{2} \int x^2 dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad [II]$$

En las vigas apoyadas en los extremos cuando se produce la condición de deflexión máxima la pendiente es nula, sustituyendo cuando  $x = \frac{L}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  en la expresión [II] se tiene:

$$EI(0) = \frac{qL\left(\frac{L}{2}\right)^2}{4} - \frac{q\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6} + C_1$$

$$0 = \frac{qL^3}{16} - \frac{qL^3}{48} + C_1$$

$$0 = \frac{qL^3}{24} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

En la condición de frontera en el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_A$ ,  $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$  en la expresión [II] se obtiene la Ecuación 1.32:

$$EI\theta_A = \frac{qL(0)^2}{4} - \frac{q(0)^3}{6} - \frac{qL^3}{24}$$

$$EI\theta_A = -\frac{qL^3}{24}$$

$$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (\text{Ec. 1.32})$$

Integrando la expresión [II] con respecto a x, se tiene que:

$$EI \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{qL}{4} \int x^2 dx - \frac{q}{6} \int x^3 dx + C_1 \int dx$$

$$EIy = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \quad [III]$$

En la condición de frontera en el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [III]

$$EI(0) = \frac{qL(0)^3}{12} - \frac{q(0)^4}{24} + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera en la mitad de la viga, sustituyendo cuando  $x = \frac{L}{2}$ ,  $y = y_B$ ,

$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la Ecuación 1.33:

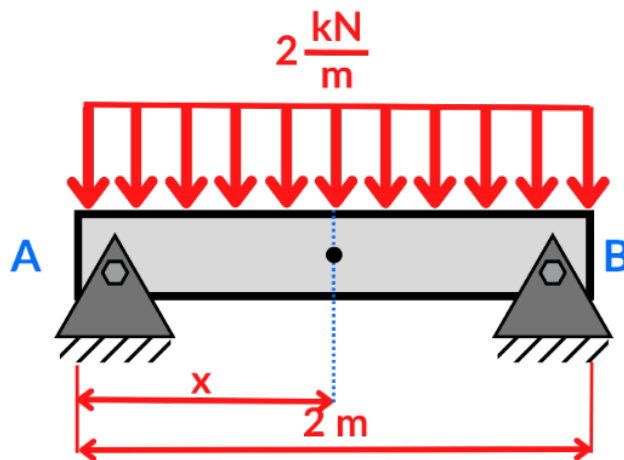
$$EIy_B = \frac{qL\left(\frac{L}{2}\right)^3}{12} - \frac{q\left(\frac{L}{2}\right)^4}{24} - \frac{qL^3}{24}\left(\frac{L}{2}\right) + 0$$

$$EIy_B = \frac{qL^4}{96} - \frac{qL^4}{384} - \frac{qL^4}{48}$$

$$EIy_B = -\frac{5qL^4}{384}$$

$$y_B = y_{\max} = -\frac{5qL^4}{384EI} \quad (\text{Ec. 1.33})$$

**Ejemplo 1.10.** Determine la deflexión máxima de una viga apoyada en los extremos que tiene una longitud de 2 m y una carga distribuida de  $2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  que actúa sobre ella, como se muestra en la Figura 1.34. Considere que el material de la viga es de acero ( $E = 210 \text{ GPa}$ ), con una sección cuadrada de 45 mm por cada lado.



**Figura 1.34.** Aplicación de M.D.I. en viga apoyada en los extremos con carga distribuida rectangular completa.

### Datos

$$E = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$b = h = 45 \text{ mm} = 0.045 \text{ m}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

Se calcula el momento de inercia de la sección cuadrada mediante la siguiente expresión:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.045 \text{ m})(0.045 \text{ m})^3}{12} = 3.417 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

En este ejercicio se empleará la forma alternativa para condiciones de carga distribuida, por lo que aplicando la Ecuación 1.10 se obtiene:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -2 \quad \text{[I]}$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = -2x + C_1 \quad \text{[II]}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{[III]}$$

En la condición de frontera para el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$0 = -(0)^2 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera para el apoyo del punto B, sustituyendo cuando  $x = 2$ ,  $M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se tiene:

$$0 = -(2)^2 + C_1(2) + 0$$

$$0 = -4 + 2C_1 + 0$$

$$4 = 2C_1$$

$$\frac{4}{2} = C_1$$

$$C_1 = 2$$

Sustituyendo  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 0$  en la expresión [III] se obtiene la ecuación de la viga elástica del ejercicio, que se expresa con la expresión [IV]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -x^2 + 2x + 0$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -x^2 + 2x \quad [IV]$$

Integrando dos veces la expresión [IV] se obtiene la expresión [V]:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{3} + x^2 + C_3$$

$$EI y = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + C_3 x + C_4 \quad [V]$$

En la condición de frontera para el apoyo del punto A, sustituyendo cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la expresión [V] se tiene:

$$EI(0) = -\frac{(0)^4}{12} + \frac{(0)^3}{3} + C_3(0) + C_4$$

$$C_4 = 0$$

En la condición de frontera para el apoyo del punto B, sustituyendo cuando  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $C_4 = 0$  en la expresión [V] se tiene:

$$EI(0) = -\frac{(2)^4}{12} + \frac{(2)^3}{3} + C_3(2) + 0$$

$$EI(0) = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + C_3(2) + 0$$

$$0 = \frac{4}{3} + 2C_3$$

$$-\frac{4}{3} = 2C_3$$

$$C_3 = -\frac{4}{3(2)} = -\frac{2}{3}$$

Substituyendo cuando  $x = 1$ ,  $C_3 = -\frac{2}{3}$ ,  $C_4 = 0$ ,  $E = 210 \times 10^6$ ,  $I = 3.417 \times 10^{-7}$  en la expresión [V] se obtiene:

$$(210 \times 10^6)(3.417 \times 10^{-7})y = -\frac{1^4}{12} + \frac{1^3}{3} - \frac{2}{3}(1) + 0$$

$$71.76y = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

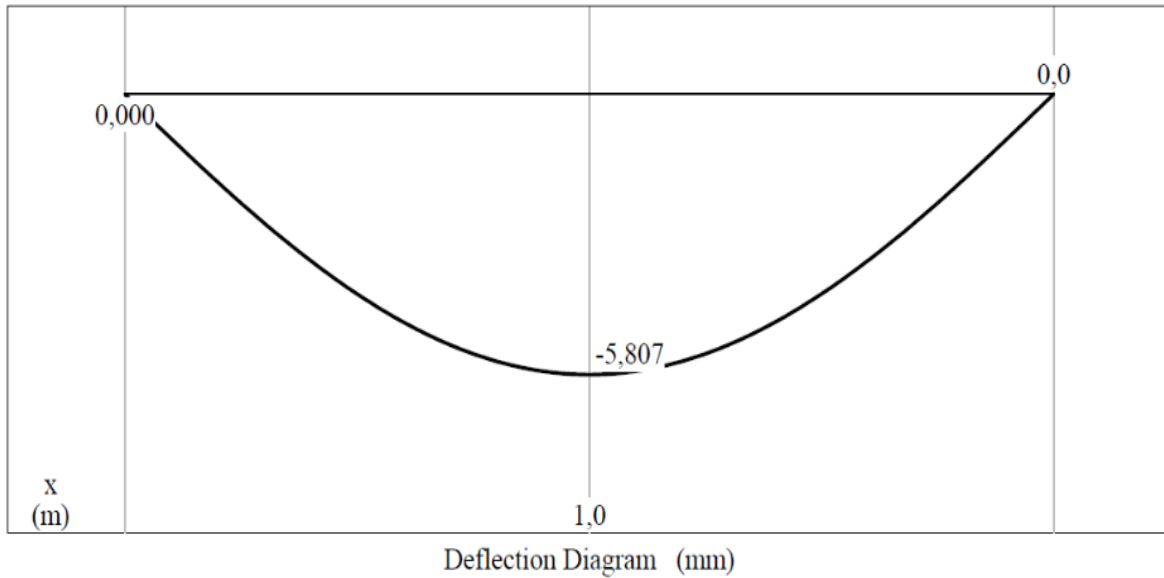
$$71.76y = -\frac{5}{12}$$

$$y = -\frac{5}{12(71.76)} = -0.00581 \text{ m} = -5.81 \text{ mm}$$

Comprobando el resultado obtenido con la Ecuación 1.33 se determina que el procedimiento esta correctamente realizado.

$$y_{\max} = -\frac{5qL^4}{384EI} = -\frac{5(2)(2)^4}{384(210 \times 10^6)(3.417 \times 10^{-7})} = -0.00581 \text{ m} = -5.81 \text{ mm}$$

Adicionalmente se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 1.35, siendo el valor de la deflexión coincidente con lo calculado.



**Figura 1.35. Comprobación mediante MDSolids con carga distribuida rectangular completa.**

### 1.5. Método de Macaulay

Este método consiste en establecer una ecuación general que satisfaga todas las condiciones de frontera, que mediante el método de doble integración resultaría una tarea compleja (Singh, 2021). Para ello se emplean dos tipos de funciones: las funciones de Macaulay, que se utilizan para describir las cargas distribuidas y las funciones de singularidad que se utilizan para representar las fuerzas y los momentos concentrados, denominadas como funciones de discontinuidad (Philpot, 2017a). Su uso se basa en la definición de restricciones para funciones ordinarias, expresándose mediante el uso de corchetes angulares en la forma  $\langle x - a \rangle^n$ , que se denomina como corchetes de Macaulay.

Las funciones de Macaulay se expresan mediante la Ecuación 1.34, es importante indicar que al cumplirse la primera condición en ambas expresiones el valor definido para ese tramo es igual a 0, eso implica que al realizar un corte en determinado tramo las demás cargas no se consideran o no existen para dicha función.

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x - a)^n, & x \geq a \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.34})$$

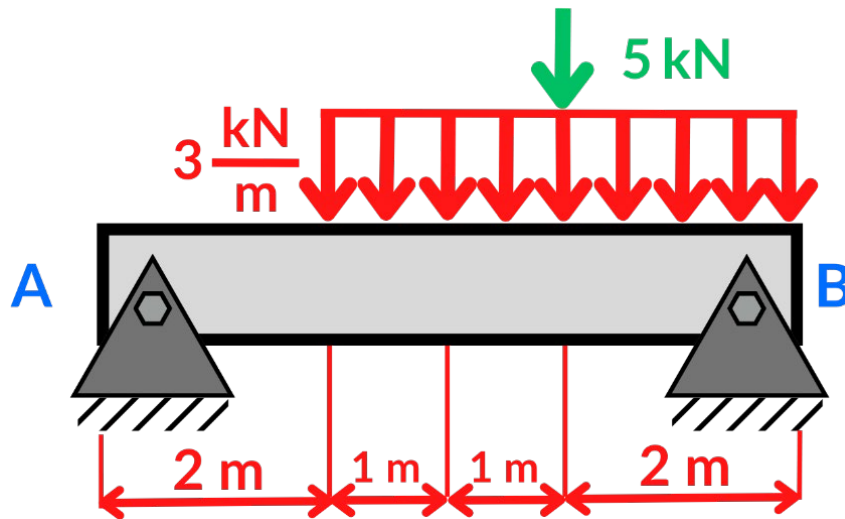
#### 1.5.1. Pasos de aplicación del método de Macaulay

Los pasos para aplicar el método de Macaulay (Srivastava & Gope, 2012), se presentan a continuación:



1. Se calculan las reacciones en los apoyos de una viga simplemente apoyada mediante el método tradicional.
2. Realizar un corte en el extremo más alejado del inicio de coordenadas en x, escribiendo una única ecuación de momentos, diferenciando cada expresión por tramo.
3. Al integrar las expresiones se integran como un todo manteniéndose entre paréntesis.

**Ejemplo 1.11.** Una viga apoyada en los extremos tiene una longitud de 6 m con una carga distribuida de  $3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  y una carga puntual de 5 kN, como se muestra en la Figura 1.36. Considere que el material de la viga es de acero ( $E = 200 \text{ GPa}$ ), con una sección circular de 30 mm. Determine la deflexión y pendiente a 1 m, 3 m y 5 m.



**Figura 1.36.** Aplicación del método de Macaulay en viga apoyada en los extremos en combinación de carga distribuida rectangular parcial y carga puntual.

**Datos**

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$d = 30 \text{ mm} \left( \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \right) = 0.030 \text{ m}$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$P = 5 \text{ kN}$$

## Resolución

Se calcula el momento de inercia de la sección cuadrada mediante la siguiente expresión:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(0.030 \text{ m})^4}{64} = 3.976 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Calculando la constante de rigidez se tiene:

$$EI = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (3.976 \times 10^{-8} \text{ m}^4) = 7.952 \text{ kN m}^2$$

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} (4 \text{ m})(2 \text{ m}) + 5 \text{ kN}(2 \text{ m}) = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 24 \text{ kN m} + 10 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 34 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) = -34 \text{ kN m}$$

$$R_A = \frac{-34 \text{ kN m}}{-6 \text{ m}} = \frac{17}{3} \text{ kN}$$

Para la aplicación del método de Macaulay se debe realizar un corte en el punto más alejado hacia la derecha donde se pueda obtener el momento interno, como se realiza a continuación:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$-\frac{17}{3}x + 3(x-2) \frac{(x-2)}{2} + 5(x-4) + M_x = 0$$

$$-\frac{17}{3}x + \frac{3}{2}(x-2)^2 + 5(x-4) + M_x = 0$$

$$M_x = \frac{17}{3}x - \frac{3}{2}(x-2)^2 - 5(x-4)$$

Observando que la viga al deformarse se produce compresión en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es positivo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene la expresión [I]:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{17}{3}x - \frac{3}{2}(x-2)^2 - 5(x-4) \quad [I]$$

Integrando dos veces la expresión [I] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{17}{6}x^2 - \frac{1}{2}(x-2)^3 - \frac{5}{2}(x-4)^2 + C_1 \quad [II]$$

$$EIy = \frac{17}{18}x^3 - \frac{1}{8}(x-2)^4 - \frac{5}{6}(x-4)^3 + C_1x + C_2 \quad [III]$$

En la condición de frontera del apoyo izquierdo, cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ , se observa que en el segundo y tercer término se cumple la primera condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x < a$  se sustituye todas las expresiones en paréntesis por cero. Reemplazando estos elementos en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = \frac{17}{18}(0)^3 - \frac{1}{8}(0)^4 - \frac{5}{6}(0)^3 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 - 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera en el extremo de la viga, cuando  $x = 6$ ,  $y = 0$ ,  $C_2 = 0$  se observa que todos los términos en paréntesis cumplen la segunda condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x > a$  se consideran todas las expresiones involucradas. Reemplazando estos elementos en la expresión [III] se tiene:

$$EI(0) = \frac{17}{18}(6)^3 - \frac{1}{8}(6-2)^4 - \frac{5}{6}(6-4)^3 + C_1(6) + 0$$

$$0 = 204 - 32 - \frac{20}{3} + 6C_1$$

$$0 = \frac{496}{3} + 6C_1$$

$$6C_1 = -\frac{496}{3}$$

$$C_1 = -\frac{496}{3(6)} = -\frac{248}{9}$$

Substituyendo cuando  $C_1 = -\frac{248}{9}$ ,  $C_2 = 0$ ,  $EI = 7.952$  en las expresiones [II] y [III] se obtiene:

$$7.952 \frac{dy}{dx} = \frac{17}{6}x^2 - \frac{1}{2}(x-2)^3 - \frac{5}{2}(x-4)^2 - \frac{248}{9} \quad \text{[IV]}$$

$$7.952y = \frac{17}{18}x^3 - \frac{1}{8}(x-2)^4 - \frac{5}{6}(x-4)^3 - \frac{248}{9}x \quad \text{[V]}$$

Substituyendo cuando  $x = 1$ ,  $y = y_1$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_1$  se observa que en el segundo y tercer término se cumple la primera condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x < a$  se sustituye todas las expresiones en paréntesis por cero. Reemplazando estos elementos en las expresiones [IV] y [V] se tiene:

$7.952\theta_1 = \frac{17}{6}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^3 - \frac{5}{2}(0)^2 - \frac{248}{9}$ $7.952\theta_1 = \frac{17}{6} - 0 - 0 - \frac{248}{9}$ $7.952\theta_1 = -\frac{445}{18}$ $\theta_1 = -\frac{445}{18(7.952)} = -3.109 \text{ rad}$
$7.952y_1 = \frac{17}{18}(1)^3 - \frac{1}{8}(0)^4 - \frac{5}{6}(0)^3 - \frac{248}{9}(1)$ $7.952y_1 = \frac{17}{18} - 0 - 0 - \frac{248}{9}$ $7.952y_1 = -\frac{479}{18}$ $y_1 = -\frac{479}{18(7.952)} = -3.346 \text{ m} = -3346 \text{ mm}$

Substituyendo cuando  $x = 3$ ,  $y = y_2$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_2$  se observa que en el segundo término se cumple la primera condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x < a$  se sustituye todas las expresiones en paréntesis por cero. Reemplazando estos elementos en las expresiones [IV] y [V] se tiene:

$$7.952\theta_2 = \frac{17}{6}(3)^2 - \frac{1}{2}(3-2)^3 - \frac{5}{2}(0)^2 - \frac{248}{9}$$

$$7.952\theta_2 = \frac{51}{2} - \frac{1}{2} - 0 - \frac{248}{9}$$

$$7.952\theta_2 = -\frac{23}{9}$$

$$\theta_2 = -\frac{23}{9(7.952)} = -0.321 \text{ rad}$$

$$7.952y_2 = \frac{17}{18}(3)^3 - \frac{1}{8}(3-2)^4 - \frac{5}{6}(0)^3 - \frac{248}{9}(3)$$

$$7.952y_2 = \frac{51}{2} - \frac{1}{8} - 0 - \frac{248}{3}$$

$$7.952y_2 = -\frac{1375}{24}$$

$$y_2 = -\frac{1375}{24(7.952)} = -7.205 \text{ m} = -7205 \text{ mm}$$

Substituyendo cuando  $x = 5$ ,  $y = y_3$ ,  $\frac{dy}{dx} = \theta_3$  se observa que todos los términos en paréntesis cumplen la segunda condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x > a$  se consideran todas las expresiones involucradas. Reemplazando estos elementos en las expresiones [IV] y [V] se tiene:

$$7.952\theta_3 = \frac{17}{6}(5)^2 - \frac{1}{2}(5-2)^3 - \frac{5}{2}(5-4)^2 - \frac{248}{9}$$

$$7.952\theta_3 = \frac{425}{6} - \frac{27}{2} - \frac{5}{2} - \frac{248}{9}$$

$$7.952\theta_3 = \frac{491}{18}$$

$$\theta_3 = \frac{491}{18(7.952)} = 3.43 \text{ rad}$$

$$7.952y_3 = \frac{17}{18}(5)^3 - \frac{1}{8}(5-2)^4 - \frac{5}{6}(5-4)^3 - \frac{248}{9}(5)$$

$$7.952y_3 = \frac{2125}{18} - \frac{81}{8} - \frac{5}{6} - \frac{1240}{9}$$

$$7.952y_3 = -\frac{2209}{72}$$

$$y_3 = -\frac{2209}{72(7.952)} = -3.858 \text{ m} = -3858 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar estos resultados como se observa en las Figuras 1.37 y 1.38, siendo coincidentes con lo calculado.

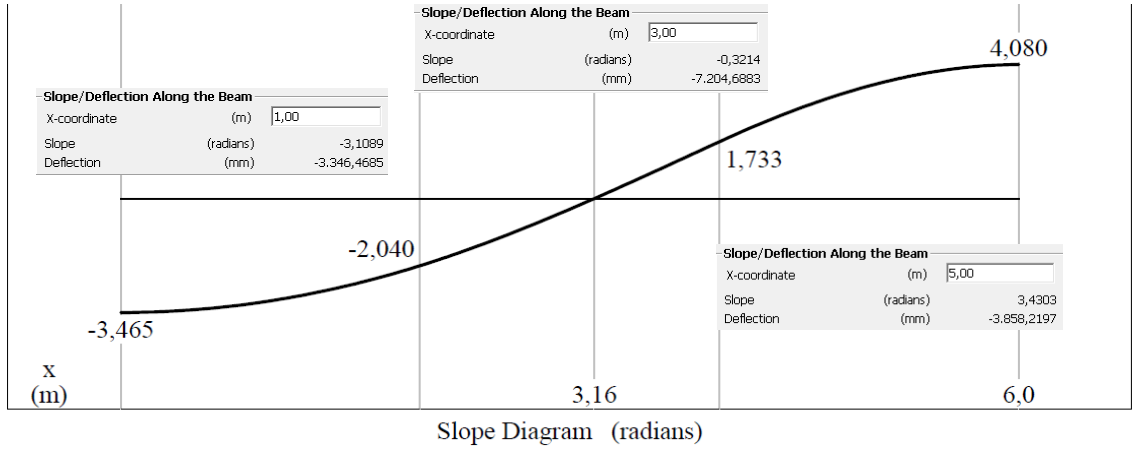


Figura 1.37. Comprobación mediante MDSolids del método de Macaulay (pendiente).

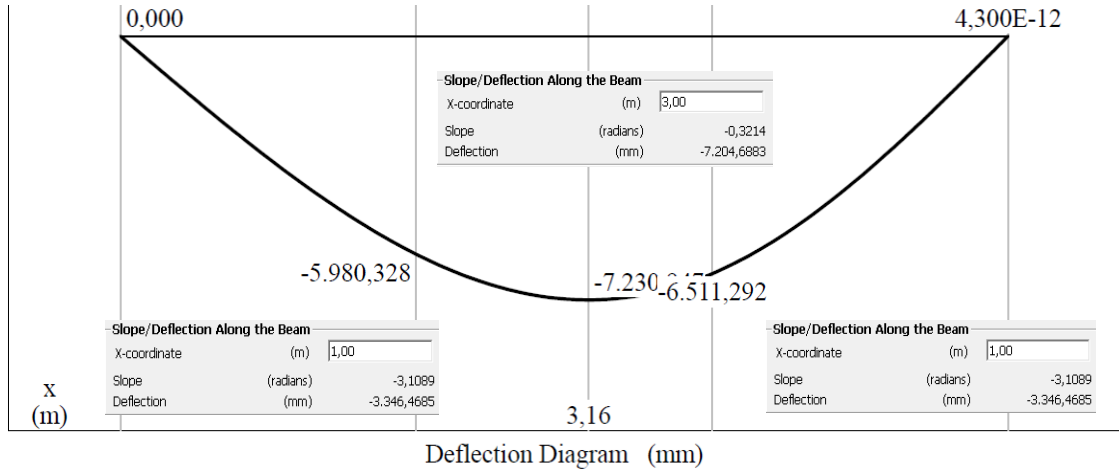


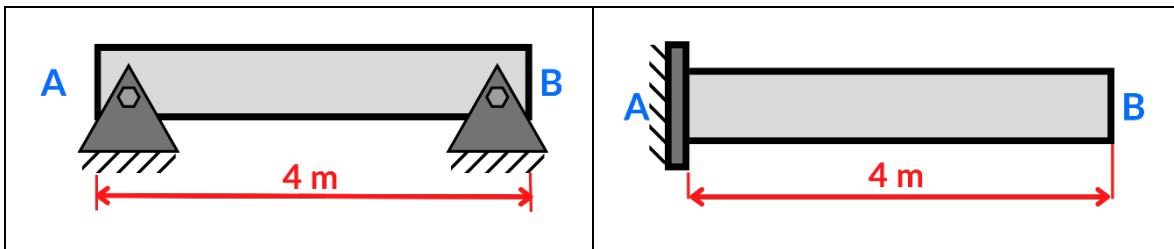
Figura 1.38. Comprobación mediante MDSolids del método de Macaulay (deflexión).

## 1.6. Problemas

1. En los problemas 1.1 a 1.10 aplique el método de doble integración para determinar la deflexión y pendiente a 1 m a la derecha del punto A para los casos individuales de carga.

Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2
Ejercicio 1.3	Ejercicio 1.4
Ejercicio 1.5	Ejercicio 1.6
Ejercicio 1.7	Ejercicio 1.8
Ejercicio 1.9	Ejercicio 1.10

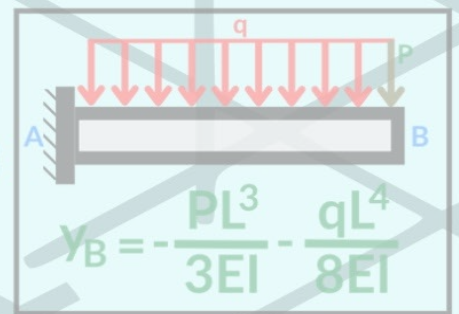
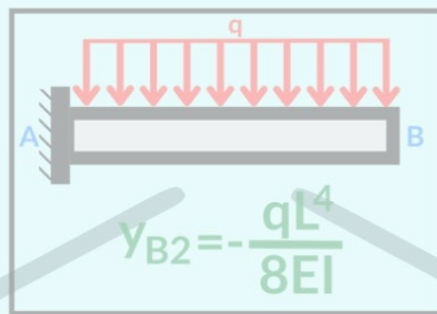
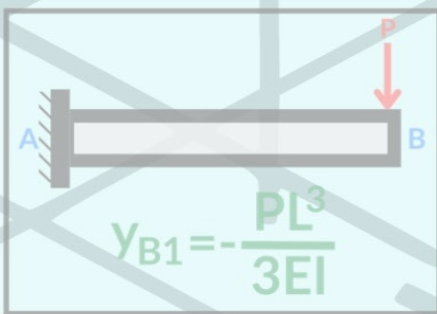
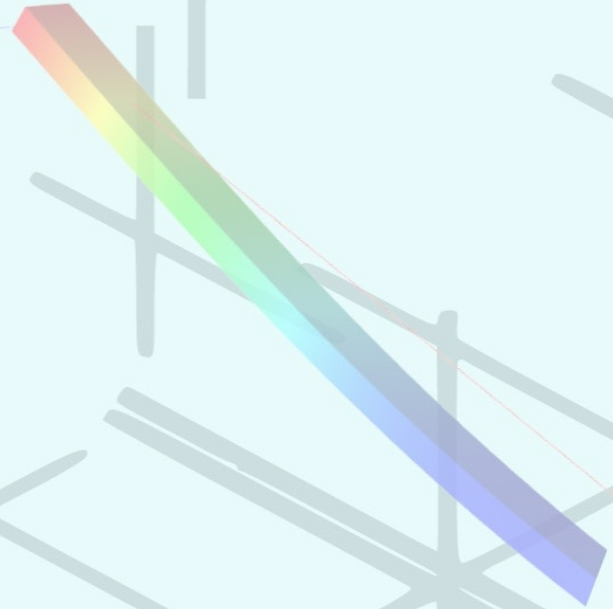
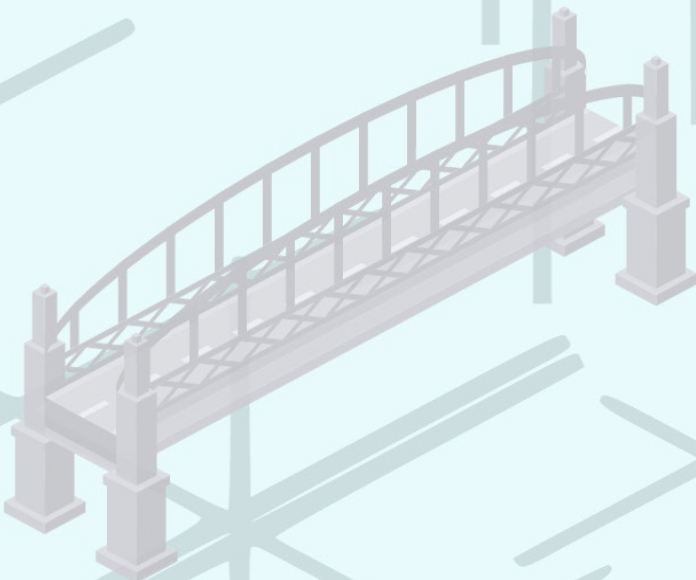
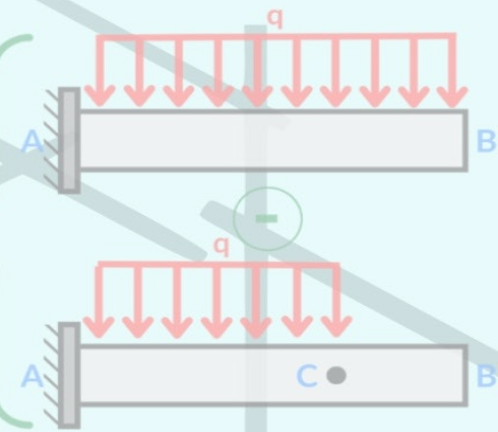
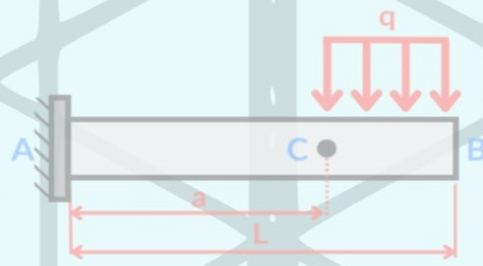
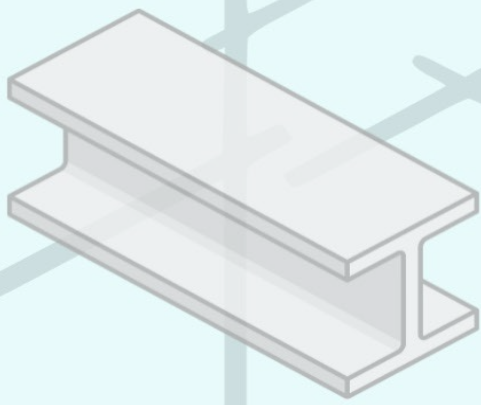
2. Aplique el método de Macaulay para determinar la deflexión y pendiente a 0 m, 1 m, 2 m, 3 m y 4 m con las combinaciones de las cargas de los ejercicios 1.1 a 1.8 para los dos casos de vigas que se detallan a continuación:



Combinaciones de carga de ejercicios

1.1 + 1.2	1.2 + 1.3	1.3 + 1.4	1.4 + 1.5	1.5 + 1.6	1.6 + 1.7	1.7 + 1.8
1.1 + 1.3	1.2 + 1.4	1.3 + 1.5	1.4 + 1.6	1.5 + 1.7	1.6 + 1.8	
1.1 + 1.4	1.2 + 1.5	1.3 + 1.6	1.4 + 1.7	1.5 + 1.8		
1.1 + 1.5	1.2 + 1.6	1.3 + 1.7	1.4 + 1.8			
1.1 + 1.6	1.2 + 1.7	1.3 + 1.8				
1.1 + 1.7	1.2 + 1.8					
1.1 + 1.8						





# CAPÍTULO I

## MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

## Objetivos

- Explorar en profundidad el método de superposición aplicado al análisis de deflexiones en vigas, con el propósito de proporcionar a los lectores una comprensión integral y práctica de esta técnica avanzada.
- Detallar los fundamentos teóricos que sustentan el método de superposición en el análisis de vigas, abordando conceptos clave como las condiciones de contorno, la linealidad del comportamiento estructural y la aplicación de cargas combinadas.
- Guiar a los lectores a través del proceso paso a paso para aplicar el método de superposición en el cálculo preciso de las deflexiones en vigas, destacando la resolución de problemas complejos mediante la descomposición de cargas y la combinación de soluciones individuales.
- Presentar ejemplos prácticos y problemas diversos que permitan a los lectores aplicar el método de superposición en situaciones concretas de ingeniería mecánica, demostrando su versatilidad y aplicabilidad en diferentes contextos estructurales.
- Fomentar la habilidad para evaluar la validez de los resultados obtenidos mediante el método de superposición, haciendo hincapié en la verificación de cálculos y en la comprensión de las limitaciones y precisión del método en diversos escenarios de análisis de vigas.

## 2.1. Método de superposición

Cuando una viga está sometida a varias cargas, suele ser conveniente determinar la pendiente o deflexión combinado de las cargas superponiendo (sumando algebraicamente) las pendientes o deflexiones debidas a cada una de las cargas que actúan individualmente sobre la viga, a este procedimiento se lo conoce como método de superposición (Kassimali, 2003). En la combinación de los casos de los apartados 1.4.1 y 1.4.3 se podría determinar la deflexión total en el extremo su-  
1.12 y 1.18 que corresponden a las deflexiones individuales de cada caso como se muestra en la Figura 2.1.

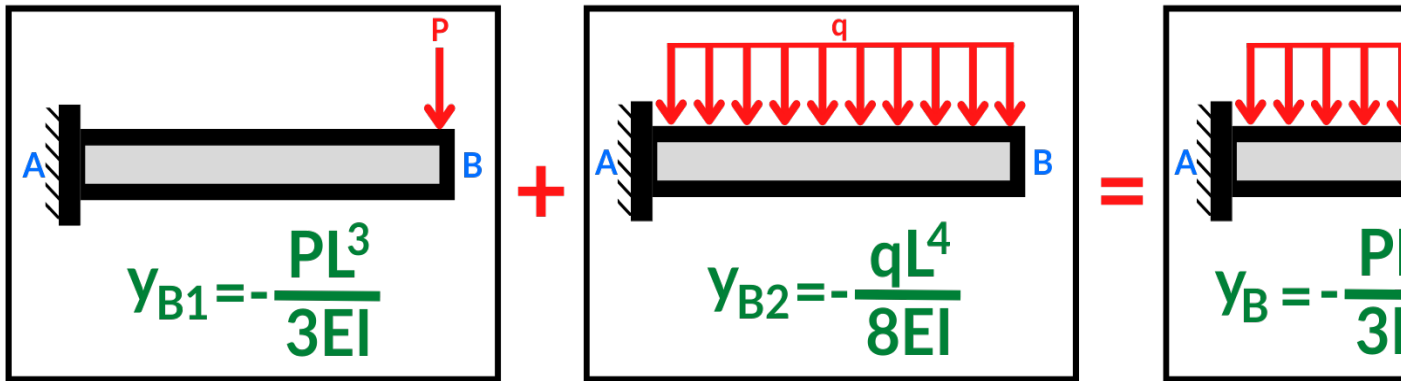
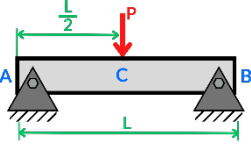
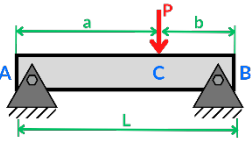
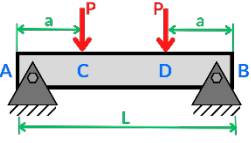
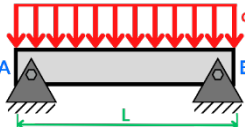
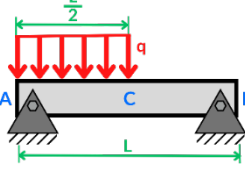
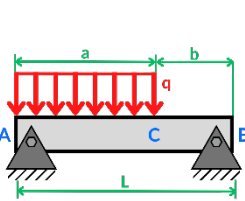
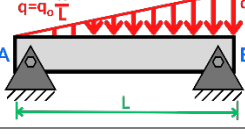
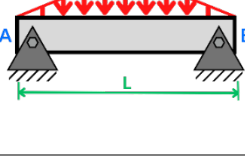


Figura 2.1 Demostración del método de superposición

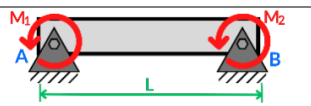
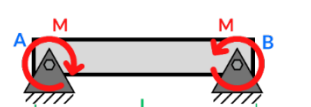
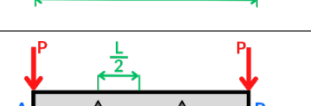

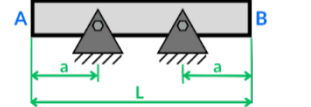
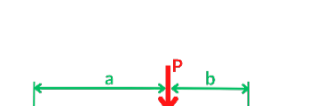
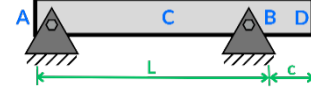
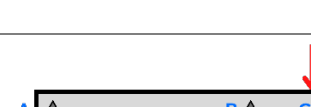

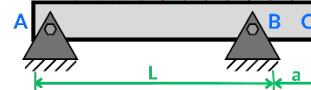
La determinación de las deflexiones y pendientes en las vigas es un proceso que requiere mucho tiempo, incluso para casos relativamente sencillas. Para facilitar el proceso de obtención se han definido tablas para caso de apoyos típicos y cargas, lo que simplifica el proceso de resolución de vigas (Bedford & Liechti, 2020). A continuación, se muestra una recopilación de casos aplicativos de este método en la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1. Deflexiones y pendientes de casos típicos de vigas.**

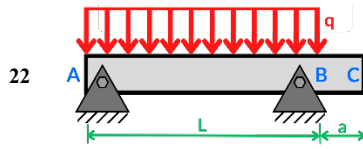
Tipo de viga	Pendiente	Deflexión
<p>1</p> 	$y_{AC} = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $y_{CB} = -\frac{P}{48EI}(-L^3 + 9L^2x - 12Lx^2 + 4x^3)$ $y_{\max} = y_C = -\frac{PL^3}{48EI}$	$\theta_{AC} = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2)$ $\theta_{CB} = -\frac{P}{16EI}(3L^2 - 8Lx + 4x^2)$ $\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = -\frac{PL^2}{16EI}$
<p>2</p> 	$y_{AC} = -\frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $y_{CB} = -\frac{Pa(L-x)}{6EIL}(2Lx - a^2 - x^2), \quad y_C = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$ <p>Si <math>a \geq b</math>, <math>y_{\max} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9EIL\sqrt{3}}</math>, cuando <math>x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}</math></p> <p>Si <math>a \leq b</math>, <math>y_{\max} = -\frac{Pa(L^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{9EIL\sqrt{3}}</math>, cuando <math>x = \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{3}}</math></p>	$\theta_{AC} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x^2)$ $\theta_{CB} = -\frac{Pa}{6EIL}(a^2 + 2L^2 - 6Lx + 3x^2)$ $\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$
<p>3</p> 	$y_{AC} = -\frac{Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2)$ $y_{CD} = -\frac{Pa}{6EI}(3Lx - a^2 - 3x^2)$ $y_{DB} = -\frac{P(L-x)}{6EI}(3aL - 3a^2 - (L-x)^2)$ $y_C = y_D = -\frac{Pa}{6EI}(3L - 4a)$ $y_{\max} = -\frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2), \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$	$\theta_{AC} = -\frac{P}{2EI}(aL - a^2 - x^2)$ $\theta_{CD} = -\frac{Pa}{2EI}(L - 2x)$ $\theta_{DB} = -\frac{P}{2EI}(aL - a^2 - (L-x)^2)$ $\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = -\frac{Pa(L-a)}{2EI}$

4		$y_{AB} = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $y_{\max} = -\frac{5qL^4}{384EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$ $y_{AC} = -\frac{qx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$	$\theta_{AB} = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$ $\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_{AC} = -\frac{q}{384EI}(64x^3 - 72Lx^2 + 9L^3)$
5		$y_{CB} = -\frac{qL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $y_C = -\frac{5qL^4}{768EI}$ $y_{\max} = -0.006563 \frac{qL^4}{EI}, \text{ cuando } x = 0.4598L$	$\theta_{CB} = -\frac{qL}{384EI}(24x^2 - 48Lx + 17L^2)$ $\theta_A = -\frac{3qL^3}{128EI}$ $\theta_B = \frac{7qL^3}{384EI}$
6		$y_{AC} = -\frac{qx}{24EIL}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3)$ $y_{CB} = -\frac{qa^2}{24EIL}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3)$	$\theta_{AC} = -\frac{q}{24EIL}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3)$ $\theta_{CB} = -\frac{qa^2}{24EIL}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6Lx^2 - 2x^3)$ $\theta_A = -\frac{qa^2}{24EIL}(2L - a)^2, \quad \theta_B = \frac{qa^2}{24EIL}(2L - a)^2$
7		$y_{AB} = -\frac{qx}{360EIL}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$ $y_{\max} = -0.00652 \frac{qL^4}{EI}, \text{ cuando } x = 0.5193L$ $y_{AC} = -\frac{qx}{960EIL}(5L^2 - 4x^2)^2$	$\theta_{AB} = -\frac{qx}{360EIL}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$ $\theta_A = -\frac{7qL^3}{360EI}, \quad \theta_B = \frac{7qL^3}{360EI}$ $\theta_{AC} = -\frac{q}{192EIL}(5L^2 - 4x^2)(L^2 - 4x^2)$
8		$y_{CB} = -\frac{q(L-x)}{960EIL}(5L^2 - 4(L-x)^2)^2$ $y_{\max} = y_C = -\frac{qL^4}{120EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$	$\theta_{CB} = -\frac{q}{192EIL}(5L^2 - 4(L-x)^2)(L-x)$ $\theta_A = -\theta_B = -\frac{5qL^3}{192EI}$

9		$y_{AB} = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{L}$	$\theta_{AB} = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3 EI} \cos \frac{\pi x}{L}$
		$y_{\max} = y_C = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3 EI}$
10		$y_{AB} = -\frac{Mx}{6EIL} (2L^2 - 3Lx + x^2)$	$\theta_{AB} = -\frac{M}{6EIL} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$
		$y_{\max} = -\frac{ML^2}{9EI\sqrt{3}}, \text{ cuando } x = L \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	$\theta_A = -\frac{ML}{3EI}, \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI}$
11		$y_{AC} = \frac{Mx}{24EIL} (L^2 - 4x^2)$	$\theta_{AC} = -\frac{M}{24EIL} (L^2 - 12x^2), \quad \theta_{CB} =$
		$y_{CB} = \frac{M(L-x)}{24EIL} (L^2 - 4(L-x)^2), \quad y_C = 0$	$\theta_A = \theta_B = \frac{M}{6EIL} (L^2 - 3b^2)$
		$y_{AC} = \frac{Mx}{6EIL} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2)$	$\theta_{AC} = \frac{M}{6EIL} (L^2 - 3b^2 - 3x^2)$
12		$y_{CB} = \frac{M}{6EIL} (3a^2L - 3a^2x - 2L^2x + 3Lx^2 - x^3)$	$\theta_{CB} = -\frac{M}{6EIL} (L^2 - 3a^2 - 3(L-x)^2)$
		$y_C = \frac{Mab}{3EIL} (2a - L)$	$\theta_A = -\frac{M}{6EIL} (3b^2 - L^2)$
		$y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}, \text{ cuando } x = L \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	$\theta_C = \frac{M}{3EIL} (3aL - 3a^2 - L^2), \quad \theta$
13		$y_{AB} = -\frac{Mx}{6EIL} (x^2 - L^2)$	$\theta_{AB} = \frac{M}{6EIL} (L^2 - 3x^2)$
		$y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$	$\theta_A = \frac{ML}{6EI}, \quad \theta$
14		$y_{AB} = -\frac{x(L-x)}{6EIL} [(M_1 - M_2)x - (2M_1 + M_2)L]$	$\theta_{AB} = \frac{1}{6EIL} [(M_1 - M_2)(3x^2 - 2Lx) -$

15		$y_{AB} = -\frac{x(L-x)}{6EIL} [(M_1 + M_2)x - (2M_1 - M_2)L]$	$\theta_{AB} = -\frac{1}{6EIL} [(M_1 + M_2)(3x^2 - 2Lx) - (2M_1 - M_2)Lx]$
16		$y_{AB} = -\frac{Mx}{2EI} (L-x)$	$\theta_{AB} = -\frac{M}{2EI} (L-2x)$
17		$y = -\frac{PL^2a}{8EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{ML}{2EI}$
18		$y = -\frac{w(L-2a)^3}{384EI} \left[ \frac{5}{L}(L-2a) - \frac{24}{L} \left( \frac{a^2}{L-2a} \right) \right], \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$	$\theta_A = \theta_B = -\frac{Pa^2}{3EI} \left( a + \frac{3}{2}L \right)$
19		$y_{AC} = -\frac{Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$	$\theta_{AC} = -\frac{Pb}{6EIL} (L^2 - b^2 - 3x^2)$
20		$y_{CB} = -\frac{Pa(L-x)}{6EIL} (2Lx - a^2 - x^2), \quad y_{BD} = \frac{Pabx}{6EIL} (L+a)$	$\theta_{CB} = -\frac{Pa}{6EIL} (2L^2 - 6Lx + a^2 + 3x^2)$
21		$y_{max} = -\frac{Pab(L+b)\sqrt{3a(L+b)}}{27EIL}, \text{ cuando } x = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$	$\theta_{BD} = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$
20		$y_{AB} = \frac{Pax}{6EIL} (L^2 - x^2)$	$\theta_{AB} = \frac{Pa}{6EIL} (L^2 - 3x^2)$
21		$y_{BC} = \frac{Px}{6EI} (2aL - 3ax - x^2)$	$\theta_{BC} = -\frac{P}{6EI} (2aL + 6ax - 3x^2)$
21		$y_{AB} = -\frac{qx}{24EIL} (L^4 - 2L^2x^2 + Lx^3 - 2a^2L^2 + 2a^2x^2)$	$\theta_{AB} = -\frac{q}{24EIL} (L^4 - 6L^2x^2 + 4Lx^3 - 2a^2L^2 + 2a^2x^2)$

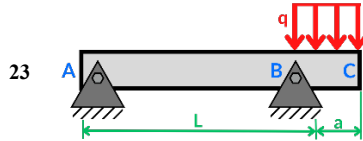
Desde A hasta  $\frac{L}{2}$ ,  $y = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$



Desde B hasta  $\frac{L}{2}$ , y es simétrica la deformación

$$y_{\max} = -\frac{5qL^4}{384EI}, \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$$

$$y_C = \frac{qL^3a}{24EI}$$



$$y_{AB} = \frac{qa^2x}{12EI}(L^2 - x^2)$$

$$\theta_{AB} = \frac{qa^2}{12EI}(L^2 - 3x^2)$$

$$y_{BC} = -\frac{qx}{24EI}(4a^2L + 6a^2x - 4ax^2 + x^3)$$

$$\theta_{BC} = -\frac{q}{6EI}(a^2L + 3a^2x - 3ax^2 + x^3)$$



$$y_{AB} = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$

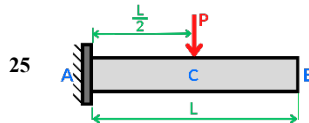
$$\theta_{AB} = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$y_B = y_{\max} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_{AC} = -\frac{Px^2}{12EI}(3L - 2x)$$

$$\theta_B = \theta_{\max} = -\frac{PL^2}{2EI}$$



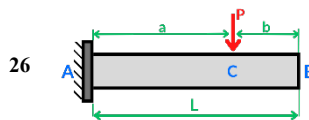
$$y_{CB} = -\frac{PL^2}{48EI}(6x - L)$$

$$\theta_C = \theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_{\max} = y_B = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$y_{AC} = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x)$$

$$\theta_{AC} = -\frac{Px}{2EI}(2a - x)$$



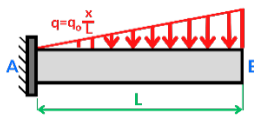
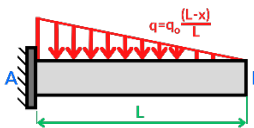
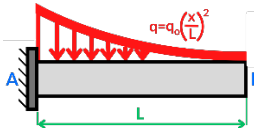

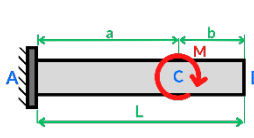
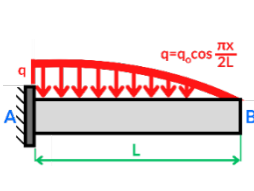
$$y_{CB} = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad y_C = -\frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\theta_{\max} = \theta_{CB} = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

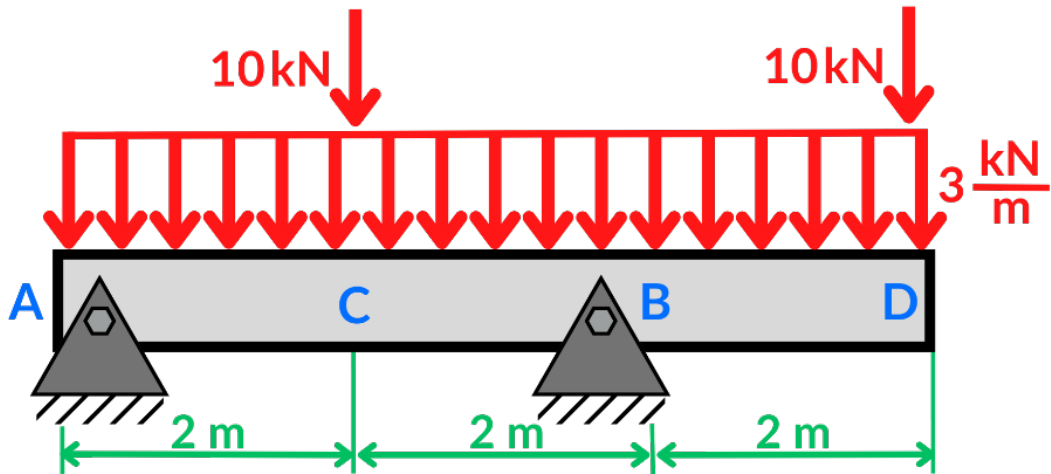
$$y_{\max} = y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$$



27		$y_{AB} = -\frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$	$\theta_{AB} = -\frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2)$
		$y_{\max} = y_B = -\frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{6EI}$
28		$y_{AC} = -\frac{qx^2}{24EI} \left( \frac{3}{2}L^2 - 2Lx + x^2 \right)$	$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{48EI}$
		$y_{CB} = -\frac{qL^3}{384EI} (8x - L), \quad y_{\max} = y_B = -\frac{7qL^4}{384EI}$	
29		$y_{AC} = -\frac{qx^2}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2)$	$\theta_{AC} = -\frac{qx}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2)$
		$y_{CB} = -\frac{qa^3}{24EI} (4x - a)$	$\theta_{\max} = \theta_{CB} = -\frac{qa^3}{6EI}$
		$y_{\max} = y_B = -\frac{qa^3}{24EI} (4L - a)$	
30		$y_{CB} = -\frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4)$	$\theta_{CB} = -\frac{q}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3)$
		$y_C = -\frac{qa^2b}{12EI} (3L + a)$	$\theta_C = -\frac{qabL}{2EI}$
		$y_{\max} = y_B = -\frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4)$	$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{q}{6EI} (L^3 - a^3)$
		$y_{AC} = -\frac{qbx^2}{12EI} (6a + 3b - 2x)$	$\theta_{AC} = -\frac{qbx}{2EI} (2a + b - x)$
31		$y_{CD} = -\frac{q}{24EI} [x^4 - 4(a+b)x^3 + 6(a+b)^2x^2 - 4a^3x + a^4]$	$\theta_{CD} = -\frac{q}{6EI} (x^3 - 3(a+b)x^2 + 3(a+b)^2x - a^3)$
		$y_{DB} = -\frac{q}{24EI} (4x[(a+b)^3 - a^3] - (a+b)^4 + a^4)$	$\theta_{DB} = -\frac{q}{6EI} [(a+b)^3 - a^3]$

<p>32</p> 	$y_{AB} = -\frac{qx^2}{120EI} (20L^3 - 10L^2x + x^3)$ $y_{\max} = y_B = -\frac{11qL^4}{120EI}$	$\theta_{AB} = -\frac{qx}{24EI} (8L^3 - 6L^2x + x^3)$ $\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{8EI}$
<p>33</p> 	$y_{AB} = -\frac{qx^2}{120EI} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$ $y_{\max} = y_B = -\frac{qL^4}{30EI}$	$\theta_{AB} = -\frac{qx}{24EI} (4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$ $\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{24EI}$
<p>34</p> 	$y_{AB} = -\frac{q}{12EI} \left( \frac{x^6}{30L^2} - \frac{L^3}{5}x + \frac{L^4}{6} \right)$ $y_{\max} = y_B = -\frac{qL^4}{72EI}$	$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{60EI}$
<p>35</p> 	$y_{AB} = -\frac{Mx^2}{2EI}, \quad y_{\max} = y_B = -\frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_{AB} = -\frac{Mx}{EI}$ $\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{ML}{EI}$
<p>36</p> 	$y_{AC} = -\frac{Mx^2}{2EI}, \quad y_{CB} = -\frac{Ma}{2EI} (2x - a)$ $y_C = -\frac{Ma^2}{2EI}, \quad y_{\max} = y_B = -\frac{Ma}{2EI} (2L - a)$	$\theta_{AC} = -\frac{Mx}{EI}$ $\theta_{\max} = \theta_{CB} = -\frac{Ma}{EI}$
<p>37</p> 	$y_{AB} = -\frac{qL}{3\pi^4EI} \left( 48L^3 \cos \frac{\pi x}{2L} - 48L^3 + 3\pi^3 Lx^2 - \pi^3 x^3 \right)$ $y_{\max} = y_B = -\frac{2qL^4}{3\pi^4EI} (\pi^3 - 24)$	$\theta_{AB} = -\frac{qL}{\pi^3EI} \left( 2\pi^2 Lx - \pi^2 x^2 - 8L^2 \sin \frac{\pi x}{2L} \right)$ $\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{qL^3}{\pi^3EI} (\pi^2 - 8)$

**Ejemplo 2.1.** Determine la deflexión y la pendiente en el punto C de la viga mostrada en la Figura 2.2. Considere la constante de rigidez  $EI = 1 \text{ MN m}^2$ .



**Figura 2.2** Aplicación del método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre.

**Datos**

$$EI = 1 \text{ MN m}^2 = 1000 \text{ kN m}^2$$

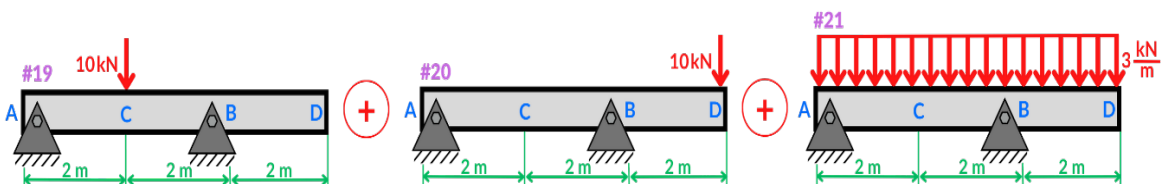
$$L = 6 \text{ m}$$

$$q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

**Resolución**

Se procede a dividir las cargas aplicadas en la viga según los casos 19, 20 y 21 indicados en la Tabla 2.1 como se muestra en la Figura 2.3. De manera que se empleen las ecuaciones correspondientes para determinar las deflexiones y pendientes individuales en el punto C.



**Figura 2.3** Aplicación de división de cargas según el método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre.

**Caso 19**

$$y_{C1} = y_{AC} = -\frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2) = -\frac{10(2)(2)}{6(1000)(4)}(4^2 - 2^2 - 2^2) = -\frac{1}{75}$$

$$\theta_{C1} = \theta_{AC} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x^2) = -\frac{10(2)}{6(1000)(4)}(4^2 - 2^2 - 3(2)^2) = 0$$

**Caso 20**

$$y_{C2} = y_{AB} = \frac{Pax}{6EIL}(L^2 - x^2) = \frac{10(2)(2)}{6(1000)(4)}(4^2 - 2^2) = \frac{1}{50}$$

$$\theta_{C2} = \theta_{AB} = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - 3x^2) = \frac{10(2)}{6(1000)(4)}(4^2 - 3(2)^2) = \frac{1}{300}$$

**Caso 21**

$$y_{C3} = y_{AB} = -\frac{qx}{24EIL}(L^4 - 2L^2x^2 + Lx^3 - 2a^2L^2 + 2a^2x^2)$$

$$y_{C3} = -\frac{3(2)}{24(1000)(4)}(4^4 - 2(4)^2(2)^2 + 4(2)^3 - 2(2)^2(4)^2 + 2(2)^2(2)^2) = -\frac{1}{250}$$

$$\theta_{C3} = \theta_{AB} = -\frac{q}{24EIL}(L^4 - 6L^2x^2 + 4Lx^3 - 2a^2L^2 + 6a^2x^2)$$

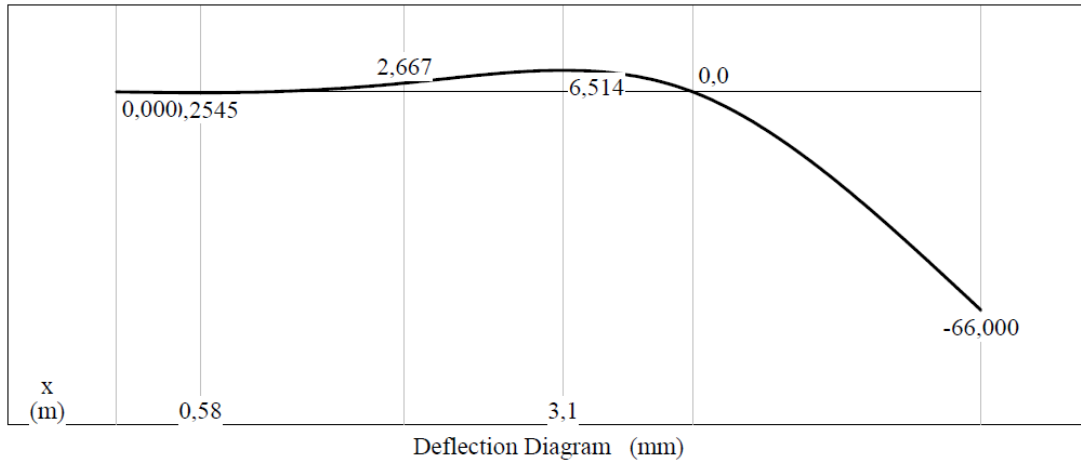
$$\theta_{C3} = -\frac{3}{24(1000)(4)}(4^4 - 6(4)^2(2)^2 + 4(4)(2)^3 - 2(2)^2(4)^2 + 6(2)^2(2)^2) = \frac{1}{1000}$$

Se determina la deformación y pendiente total en C sumando cada una de las deformaciones y pendientes individuales en ese punto.

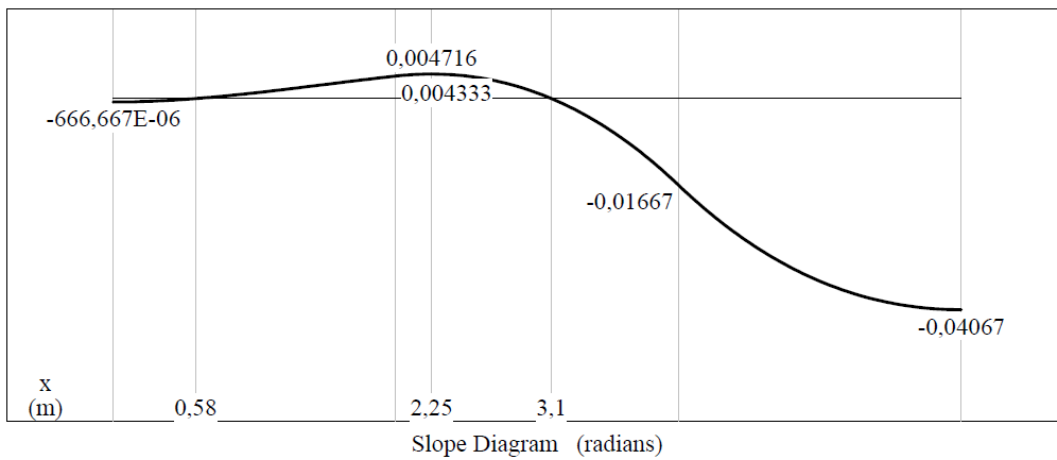
$$y_C = y_{C1} + y_{C2} + y_{C3} = -\frac{1}{75} + \frac{1}{50} - \frac{1}{250} = \frac{1}{375} = 0.0026 \text{ m} = 2.67 \text{ mm}$$

$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} + \theta_{C3} = 0 + \frac{1}{300} + \frac{1}{1000} = \frac{13}{3000} = 0.00433 \text{ rad}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 2.4 y 2.5, siendo coincidentes con lo calculado.

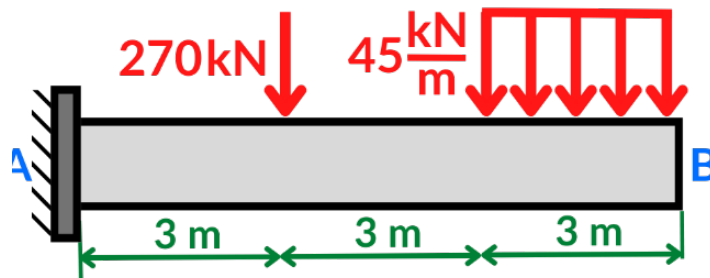


**Figura 2.4. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre (deflexión).**



**Figura 2.5. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre (pendiente).**

**Ejemplo 2.2. Determine la deflexión y la pendiente en el punto B de la viga mostrada en la Figura 2.6. Considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 1665 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .**



**Figura 2.6 Aplicación del método de superposición en viga empotrada.**

## Datos

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I = 1665 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1.665 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$L = 9 \text{ m}$$

$$q = 45 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$P = 270 \text{ kN}$$

## Resolución

Se procede a dividir las cargas aplicadas en la viga según los casos 26 y 30 indicados en la Tabla 2.1 como se muestra en la Figura 2.7. De manera que se empleen las ecuaciones correspondientes para determinar las deflexiones y pendientes individuales en el punto B.



Figura 2.7 Aplicación de división de cargas según el método de superposición en viga empotrada.

### Caso 26

$$y_{B1} = y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) = -\frac{270(3)^2}{6(200 \times 10^6)(1.665 \times 10^{-3})}(3(9) - 3) = -0.0292$$

$$\theta_{B1} = \theta_{CB} = -\frac{Pa^2}{2EI} = -\frac{270(3)^2}{2(200 \times 10^6)(1.665 \times 10^{-3})} = -0.003649$$

### Caso 30

$$y_{B2} = y_B = -\frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4)$$

$$y_{B2} = -\frac{45}{24(200 \times 10^6)(1.665 \times 10^{-3})}(3(9)^4 - 4(6)^3(9) + 6^4) = -0.0743$$

$$\theta_{B2} = \theta_B = -\frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$

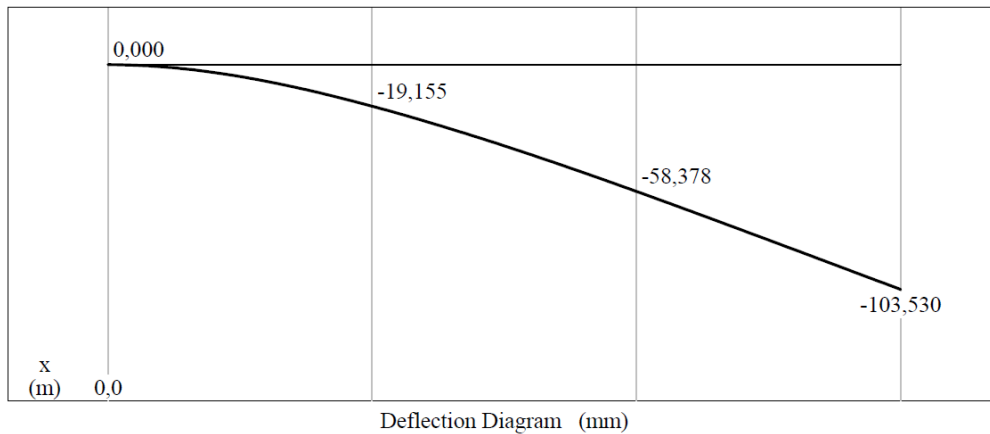
$$\theta_{B2} = -\frac{45}{6(200 \times 10^6)(1.665 \times 10^{-3})}(9^3 - 6^3) = -0.011554$$

Se determina la deformación y pendiente total en B sumando cada una de las deformaciones y pendientes individuales en ese punto.

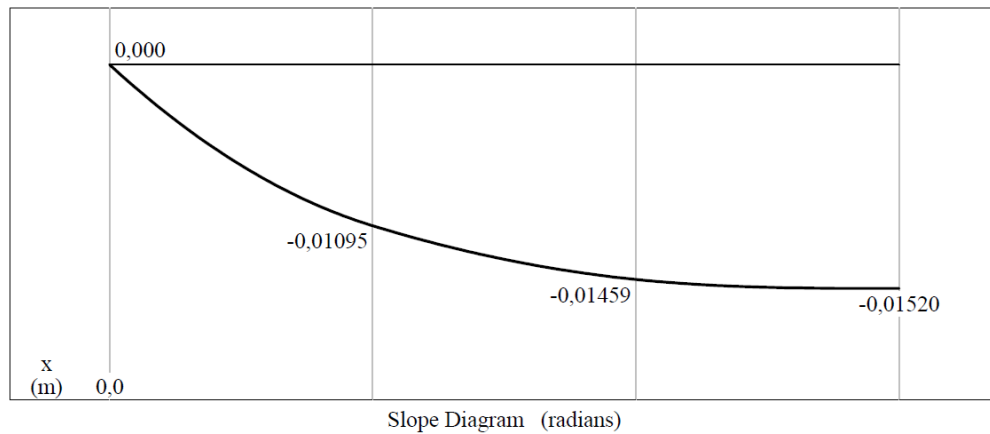
$$y_B = y_{B1} + y_{B2} = -0.0292 - 0.0743 = -0.1035 \text{ m} = -103.5 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = -0.003649 - 0.011554 = -0.015203 \text{ rad}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 2.8 y 2.9, siendo coincidentes con lo calculado.

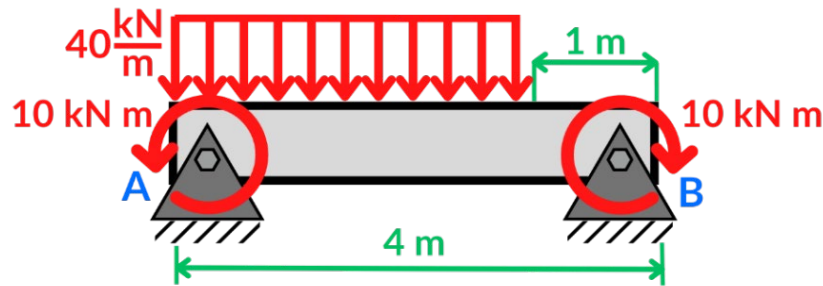


**Figura 2.8. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre (deflexión).**



**Figura 2.9. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición en viga simplemente apoyada con extremo libre (pendiente).**

**Ejemplo 2.3.** Determine la deflexión y la pendiente de la viga a 3 m del apoyo A como se muestra en la Figura 2.10. Considere que EI como constante.



**Figura 2.10** Aplicación del método de superposición en viga apoyada en sus extremos.

**Datos**

$$L = 4 \text{ m}$$

$$q = 40 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$M = 10 \text{ kN m}$$

**Resolución**

Se procede a dividir las cargas aplicadas en la viga según los casos 14 y 6 indicados en la Tabla 2.1 como se muestra en la Figura 2.11. De manera que se empleen las ecuaciones correspondientes para determinar las deflexiones y pendientes individuales a 3 m del apoyo.



**Figura 2.11** Aplicación de división de cargas según el método de superposición en viga apoyada en sus extremos.

**Caso 14**

$$y_1 = y_{AB} = -\frac{x(L-x)}{6EI L} [(M_1 - M_2)x - (2M_1 + M_2)L]$$

$$y_1 = -\frac{3(4-3)}{6EI(4)} [(10 - 10)(3) - (2(10) + 10)(4)] = \frac{15}{EI}$$



$$\theta_1 = \theta_{AB} = \frac{1}{6EIL} [(M_1 - M_2)(3x^2 - 2Lx) - (2M_1 + M_2)(2Lx - L^2)]$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6EI(4)} [(10 - 10)(3(3)^2 - 2(4)(3)) - (2(10) + 10)(2(4)(3) - 4^2)] = -\frac{10}{EI}$$

### Caso 6

$$y_2 = y_{CB} = -\frac{qa^2}{24EIL} (-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3)$$

$$y_2 = -\frac{40(3)^2}{24EI(4)} (-3^2(4) + 4(4)^2(3) + 3^2(3) - 6(4)(3)^2 + 2(3)^3) = -\frac{315}{4EI}$$

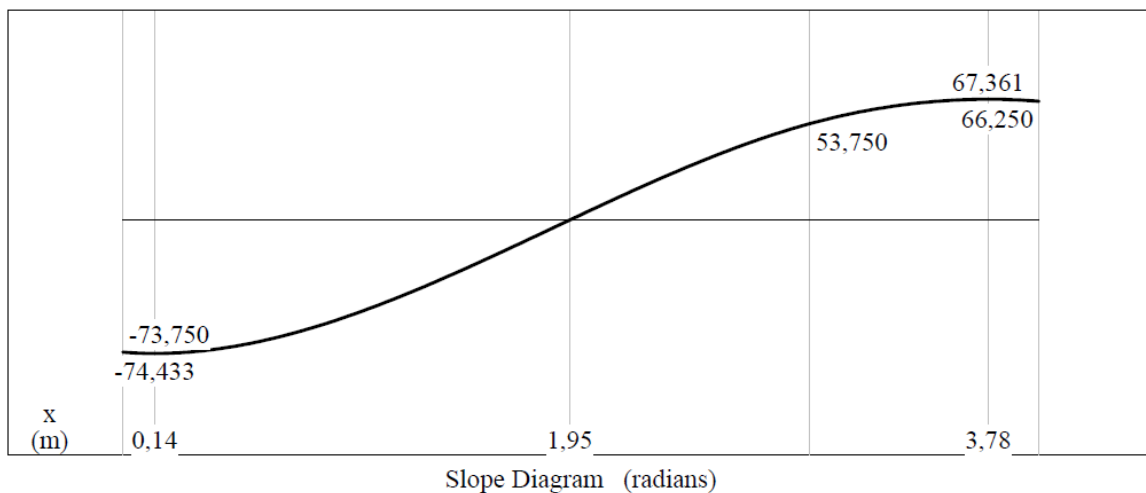
$$\theta_2 = -\frac{qa^2}{24EIL} (4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) = -\frac{40(3)^2}{24EI(4)} (4(4)^2 + 3^2 - 12(4)(3) + 6(3)^2) = \frac{255}{4EI}$$

Se determina la deformación y pendiente cuando  $x = 3$  m sumando cada una de las deformaciones y pendientes individuales en ese punto.

$$y = y_1 + y_2 = \frac{15}{EI} - \frac{315}{4EI} = -\frac{255}{4EI} = -\frac{63.75}{EI}$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = -\frac{10}{EI} + \frac{255}{4EI} = -\frac{215}{4EI} = \frac{53.75}{EI}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 2.12 y 2.13, siendo coincidentes con lo calculado.



**Figura 2.12. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición viga apoyada en sus extremos (deflexión).**

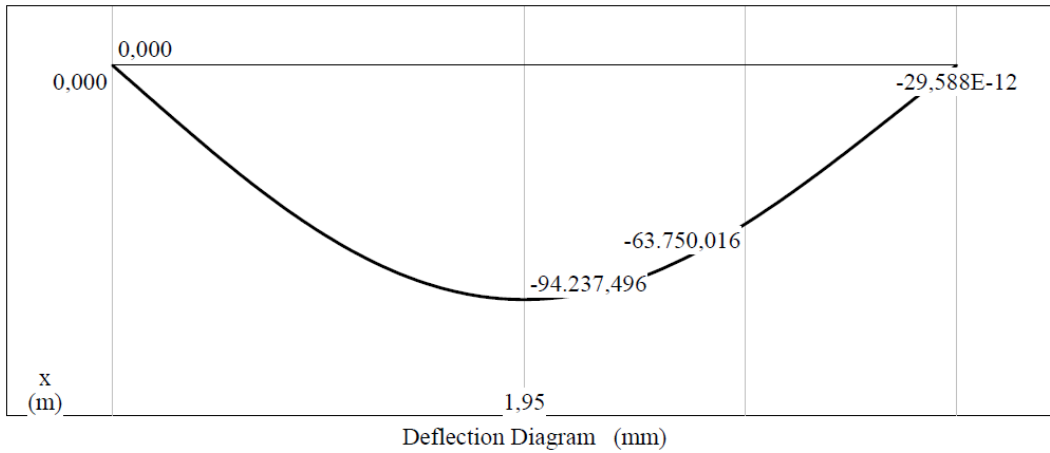
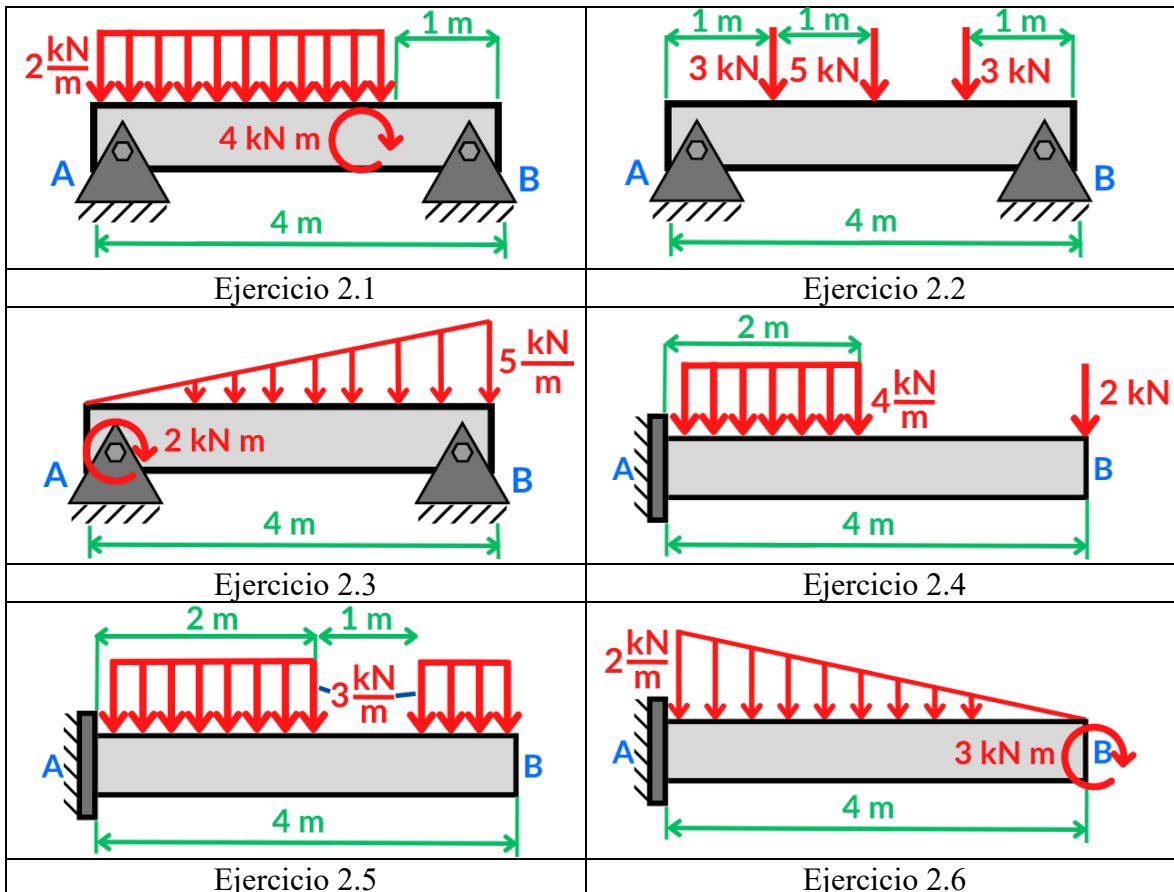
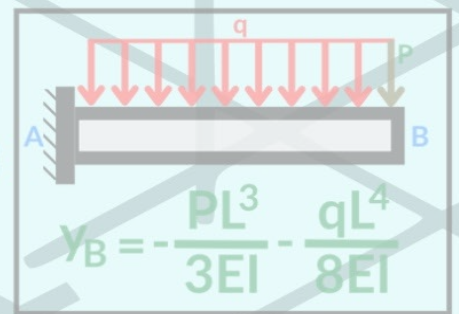
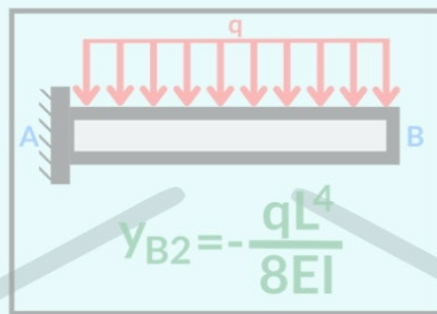
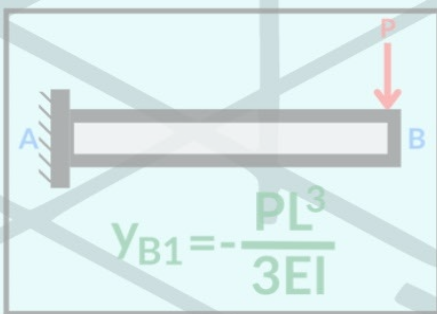
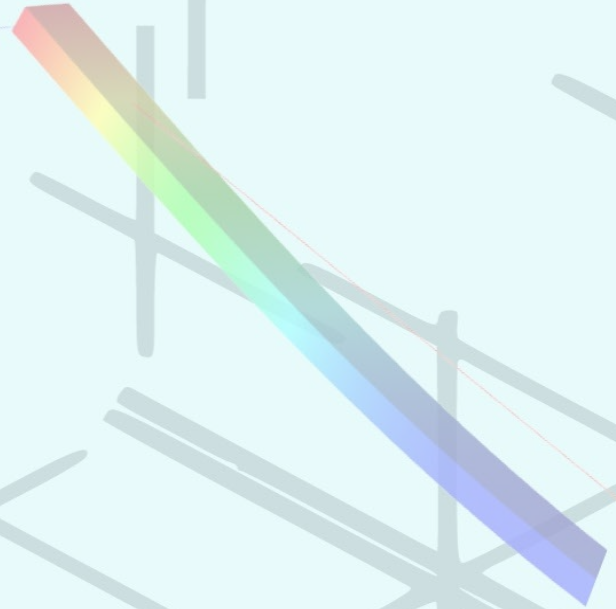
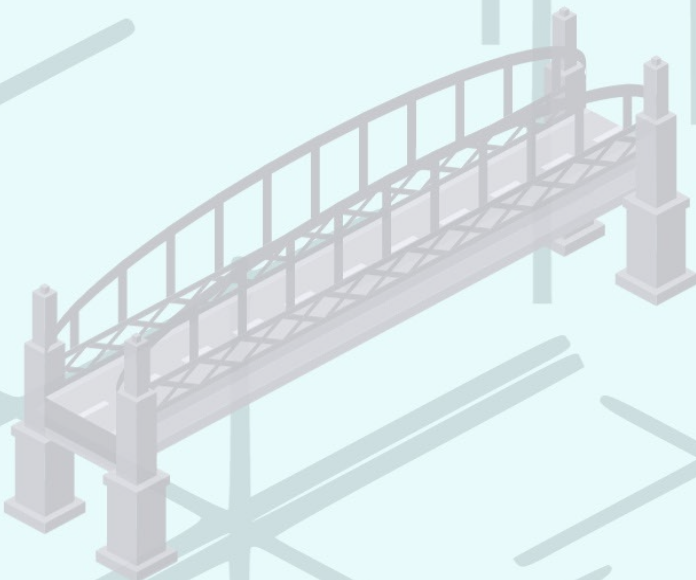
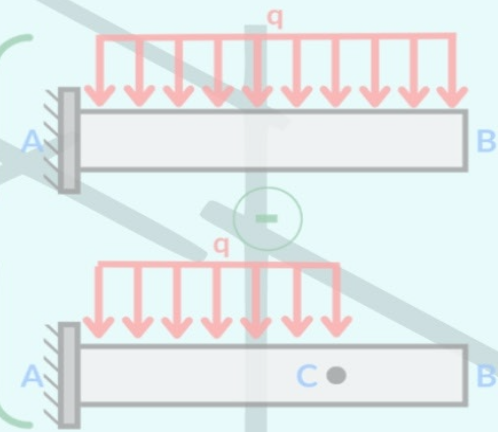
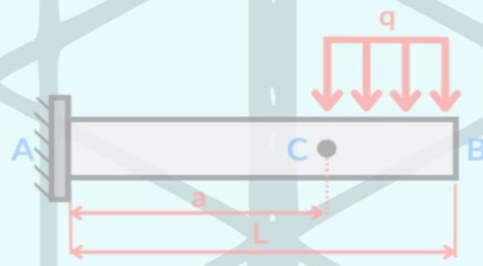
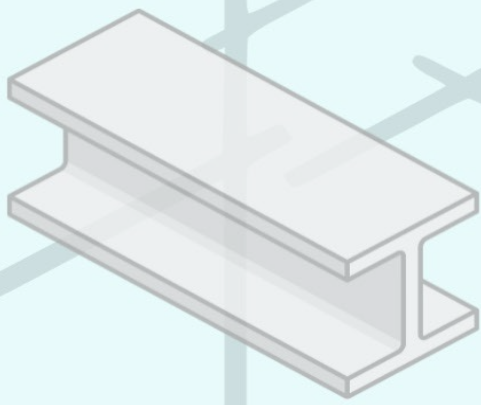


Figura 2.13. Comprobación mediante MDSolids del método de superposición viga apoyada en sus extremos (pendiente).

## 2.2. Problemas

En los problemas 2.1 a 2.6 aplique el método de superposición para determinar la deflexión y pendiente a 3 m del apoyo A (viga apoyada en los extremos) y en el extremo (viga empotrada). Considere EI constante.





# CAPÍTULO III

## MÉTODO DE MOMENTO DE ÁREA

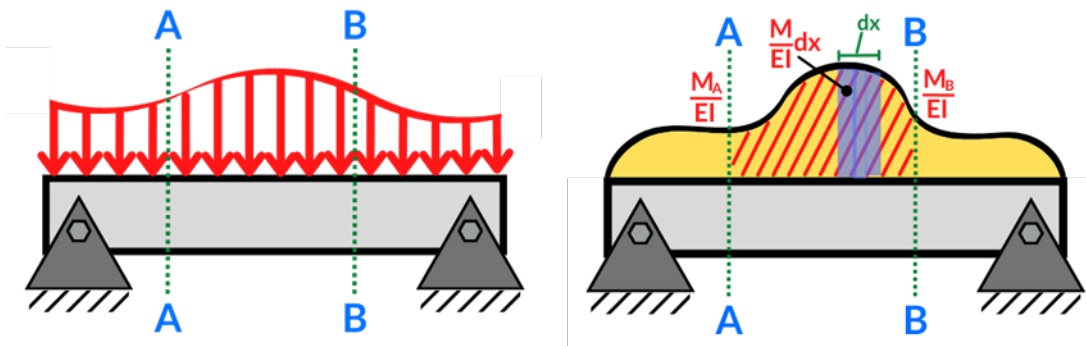
## Objetivos

- Comprender y aplicar los principios fundamentales del momento de área en el análisis de deflexiones en vigas, ofreciendo a los lectores una comprensión detallada y práctica de esta técnica matemática.
- Explorar en profundidad los conceptos teóricos del momento de área y su relación con el comportamiento de las vigas bajo cargas, centrándose en la interpretación geométrica de la rigidez de una sección transversal.
- Guiar a los lectores en el proceso de cálculo de momentos de área para secciones transversales simples y compuestas, capacitándolos para determinar las propiedades geométricas necesarias en el análisis de deflexiones.
- Demostrar la aplicación práctica del momento de área en el cálculo de deflexiones en vigas, empleando ejemplos variados que ilustren su utilidad en situaciones reales de ingeniería mecánica.
- Desarrollar la capacidad de los lectores para evaluar y validar los resultados obtenidos a través del uso del momento de área en el análisis de deflexiones, destacando la importancia de la precisión y la verificación de los cálculos realizados.

### 3.1. Generalidades

El método se basa en dos teoremas, denominados teoremas del momento de área, que fueron desarrollados por Otto Mohr y posteriormente expuestos formalmente por Charles E. Greene en 1873 (Hibbeler, 2020), estos relacionan la geometría de la curva elástica de una viga con su diagrama de momento flector, expresando soluciones de la ecuación de la viga elástica gráficamente mediante las áreas del diagrama (Kassimali, 2020a).

Al analizar el diagrama de momentos producido en una condición de cargas en una viga, es posible determinar la pendiente y deflexión de la viga. Esto se debe a que, al integrar la Ecuación 1.8, como se sabe por conocimientos de cálculo, la expresión de la integral corresponde al área bajo la curva como se observa en la Figura 3.1.



**Figura 3.1. Representación del área bajo la curva del diagrama de momentos**

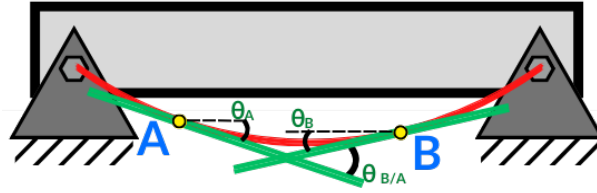
Tomando dos puntos arbitrarios A y B de una viga el área bajo la curva quedaría definida por estos límites, de manera que la integral se expresaría mediante la Ecuación 3.1.

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_B - \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (\text{Ec. 3.1})$$

### 3.2. Teorema 1

El primer teorema expresa que “la diferencia de pendientes entre dos puntos cualesquiera de una viga es igual al área neta del diagrama de momentos flectores entre esos puntos, dividida por la constante de rigidez (EI) de la viga” (R.K. Kaushik, 2019). Esto se ejemplifica mediante la Figura 3.2, en donde se identifican los dos ángulos formados con respecto a los puntos A y B por las rectas tangentes que se han trazado, cuya diferencia es equivalente al área producida del área bajo la curva como se indicó en el apartado 3.1. Esto se expresa empleando la Ecuación 3.2.

$$\theta_{B/A} = \text{Área bajo el diagrama de } M/EI \text{ de A a B} \quad (\text{Ec. 3.2})$$



**Figura 3.2. Identificación de rectas tangentes para pendientes según el Teorema 1 del método de Momento de Área**

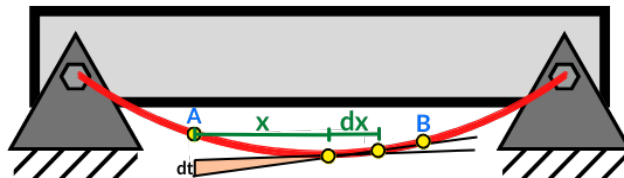
### 3.2.1. Criterios de aplicación del Teorema 1

Para la aplicación del teorema 1 es importante realizar ciertas convenciones de signos (Goodno, Barry J. & Gere James, 2018), que se indican a continuación:

- Los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  son positivos cuando son antihorarios.
- El ángulo  $\theta_{B/A}$  entre las tangentes es positivo cuando el ángulo  $\theta_B$  es algebraicamente mayor que el ángulo  $\theta_A$ . Además, nótese que el punto B debe estar a la derecha del punto A; es decir, debe estar más a lo largo del eje de la viga a medida que nos movemos en la dirección x.
- El momento flector M es positivo según la convención de signos habitual, es decir, M es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga.
- El área del diagrama  $\frac{M}{EI}$  recibe un signo positivo o negativo según que el momento flector sea positivo o negativo. Si una parte del diagrama de momentos flectores es positiva y otra negativa, las partes correspondientes del diagrama  $\frac{M}{EI}$  reciben esos mismos signos.

### 3.3. Teorema 2

El segundo teorema expresa que “el desplazamiento vertical de un punto de la curva elástica desde una tangente a la curva elástica en un segundo punto es igual al momento del área del diagrama de momentos que se encuentra entre los dos puntos, tomado alrededor del primer punto, dividido por la constante de rigidez (EI)” (Limbrunner & D'Allaird, 2016). Esto se ejemplifica mediante la Figura 3.3, en donde se identifican las dos rectas tangentes que se han trazado en los dos puntos centrales, cuya extensión hasta el punto A y medición vertical es equivalente a la deflexión alcanzada en términos diferenciales, como se indica en la Ecuación 3.3.



**Figura 3.3. Identificación de rectas tangentes para deflexiones según el Teorema 2 del método de Momento de Área**

$$y_{B/A} = y_B - y_A = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx = \text{Área}(\bar{x}) \quad (\text{Ec. 3.3})$$

### 3.3.1. Criterios de aplicación del Teorema 2

Para la aplicación de este teorema es importante realizar ciertas convenciones de signos, que se indican a continuación (Goodno, Barry J. & Gere James, 2018):

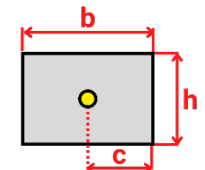
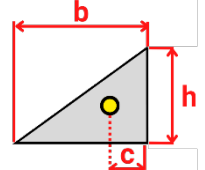
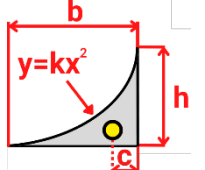
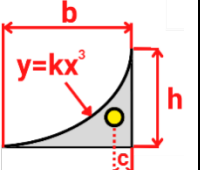
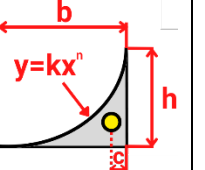
- Si el momento flector es positivo, entonces el primer momento del diagrama  $\frac{M}{EI}$  es también positivo, siempre que el punto B esté a la derecha del punto A. En estas condiciones, la desviación tangencial  $t_{B/A}$  es positiva y el punto B está por encima de la tangente en A.
- Si, al moverse de A hacia B en la dirección x, el área del diagrama  $\frac{M}{EI}$  es negativa, entonces el primer momento es también negativo y la desviación tangencial es negativa, lo que significa que el punto B está por debajo de la tangente en A.
- El primer momento del área del diagrama  $\frac{M}{EI}$  puede obtenerse tomando el producto del área del diagrama y la distancia x desde el punto B al centroide C del área.

### 3.4. Diagrama de momentos por partes

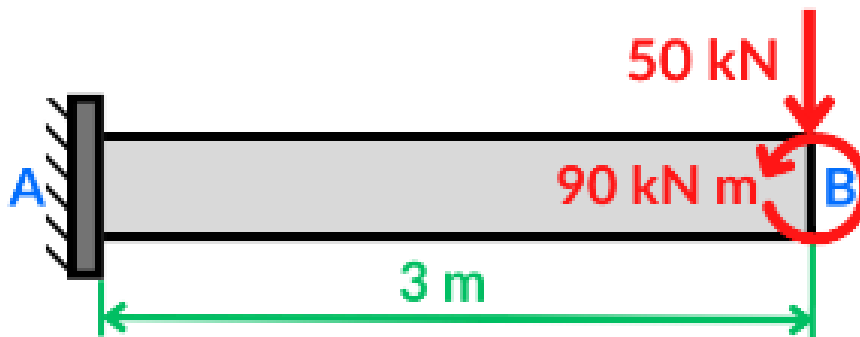
A modo de facilitar el procedimiento de resolución del método de momento de área, se recomienda analizar individualmente el efecto de cada carga en una viga. Para ello, se dibuja el diagrama de momento reducido para cada carga, y se obtiene el ángulo  $\theta_{B/A}$  mediante la suma algebraica de cada área. Mientras que la desviación tangencial  $y_{B/A}$  se obtiene con la suma de los primeros momentos de área respecto al eje vertical de B (Beer et al., 2020).

En la Tabla 3.1 se observa una representación de las áreas y centroides de las geometrías más comunes para el área de los diagramas de momentos.

**Tabla 3.1. Representación de áreas y centroides comunes.**

					
Área	$bh$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh}{3}$	$\frac{bh}{4}$	$\frac{bh}{n+1}$
c	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{5}$	$\frac{b}{n+2}$

**Ejemplo 3.1.** Determine la deflexión y pendiente en el punto B de la viga mostrada en la Figura 3.4 empleando el método de momento de área. Considere que  $EI = 10 \text{ MN m}^4$ .



**Figura 3.4** Aplicación del método de momento de área en viga empotrada.

**Datos**

$$EI = 10 \text{ MN m}^2 = 10000 \text{ kN m}^2$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$P = 90 \text{ kN m}$$

$$M = 180 \text{ kN}$$

**Resolución**

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-50 \text{ kN}(3 \text{ m}) + 90 \text{ kN m} + M_A = 0$$

$$-60 \text{ kN m} + M_A = 0$$

$$M_A = 60 \text{ kN m}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 50 \text{ kN} = 0$$

$$R_A = 50 \text{ kN}$$



Realizando un corte en el punto B y analizando el momento hacia la izquierda:

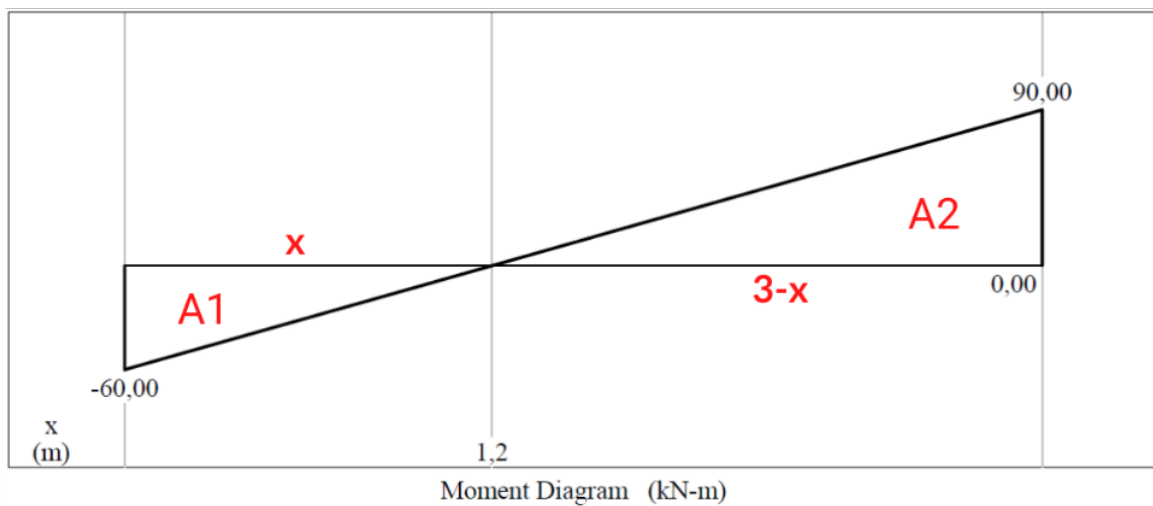
$$\Sigma M_B = 0$$

$$-50 \text{ kN}(3 \text{ m}) + 90 \text{ kN m} - M_B = 0$$

$$-60 \text{ kN m} + M_B = 0$$

$$M_B = 60 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 3.5.



**Figura 3.5. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de momento de área en viga empotrada.**

Para determinar la distancia cuando el momento se vuelve cero se considera la relación geométrica de la pendiente del diagrama, de manera que:

$$\tan \alpha = \frac{60}{x} = \frac{90}{3-x}$$

$$60(3-x) = 90x$$

$$180 - 60x = 90x$$

$$180 = 90x + 60x$$

$$180 = 150x$$

$$x = \frac{180}{150} = 1.2 \text{ m}$$

### Pendiente y deflexión en B

Empleando la Ecuación 3.2 y 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AB según la Tabla 3.1 se tiene:

$$\theta_{B/A} = \frac{1}{EI} (A_1 + A_2) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1.2(60)}{2} + \frac{1.8(90)}{2} \right] = \frac{45}{EI} = \frac{45}{10000} = 0.0045 \text{ rad}$$

$$y_{B/A} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1.2(60)}{2} \left( 1.8 + \frac{2(1.2)}{3} \right) + \frac{1.8(90)}{2} \left( \frac{1.8}{3} \right) \right] = -\frac{45}{EI}$$

$$y_{B/A} = -\frac{45}{10000} = -0.0045 \text{ m}$$

Se debe recordar que en los empotramientos la condición de frontera para la pendiente y deflexión son cero, por lo que  $\theta_A = 0$  y  $y_A = 0$ .

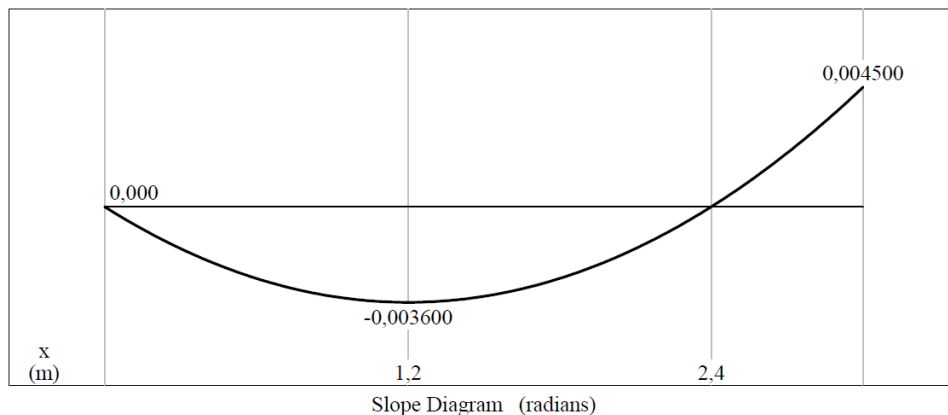
Considerando que  $\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A$  se puede despejar  $\theta_B$ .

$$\theta_B = \theta_{B/A} + \theta_A = 0.0045 + 0 = 0.0045 \text{ rad}$$

Considerando que  $y_{B/A} = y_B - y_A$  se puede despejar  $y_B$ .

$$y_B = y_{B/A} + y_A = -0.0045 + 0 = -0.0045 \text{ m} = -4.5 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 3.6 y 3.7, siendo coincidentes con lo calculado.



**Figura 3.6. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga empotrada (deflexión).**

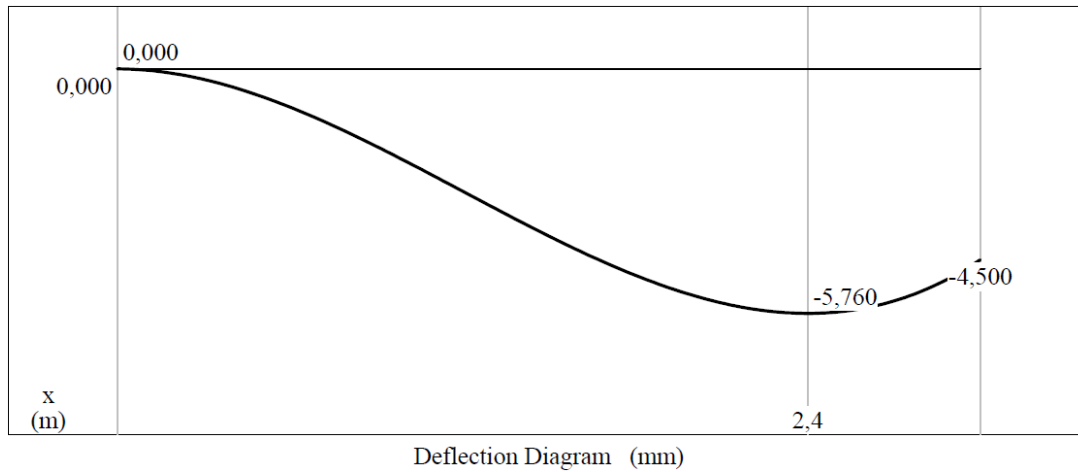


Figura 3.7. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga empotrada (pendiente).

Ejemplo 3.2. Determine la pendiente en los puntos A y B, y la deflexión en los puntos C y D de la viga mostrada en la Figura 3.8 empleando el método de momento de área. Considere que  $E = 12.5 \text{ GPa}$  y  $I = 19200 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

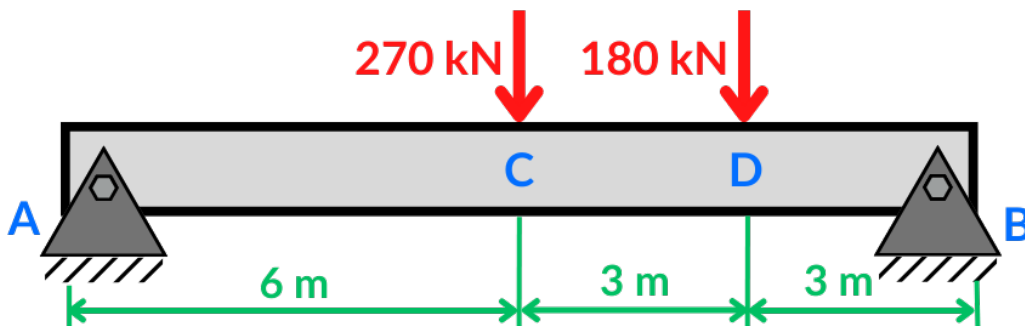


Figura 3.8 Aplicación del método de momento de área en viga apoyada en los extremos.

**Datos**

$$E = 12.5 \text{ GPa} = 12.5 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I = 19200 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 0.0192 \text{ m}^4$$

$$L = 12 \text{ m}$$

$$P_1 = 270 \text{ kN}$$

$$P_2 = 180 \text{ kN}$$

## Resolución

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A(12 \text{ m}) + 270 \text{ kN}(6 \text{ m}) + 180 \text{ kN}(3 \text{ m}) = 0$$

$$-R_A(12 \text{ m}) + 1620 \text{ kN m} + 540 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(12 \text{ m}) + 2160 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(12 \text{ m}) = -2160 \text{ kN m}$$

$$R_A = \frac{-2160 \text{ kN m}}{-12 \text{ m}} = 180 \text{ kN}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 270 \text{ kN} - 180 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$180 \text{ kN} - 270 \text{ kN} - 180 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$-270 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_B = 270 \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto C y analizando el momento hacia la izquierda:

$$\Sigma M_C = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + M_C = 0$$

$$-180 \text{ kN}(6 \text{ m}) + M_C = 0$$

$$-1080 \text{ kN m} + M_C = 0$$

$$M_C = 1080 \text{ kN m}$$

Realizando un corte en el punto D y analizando el momento hacia la derecha:

$$\Sigma M_D = 0$$

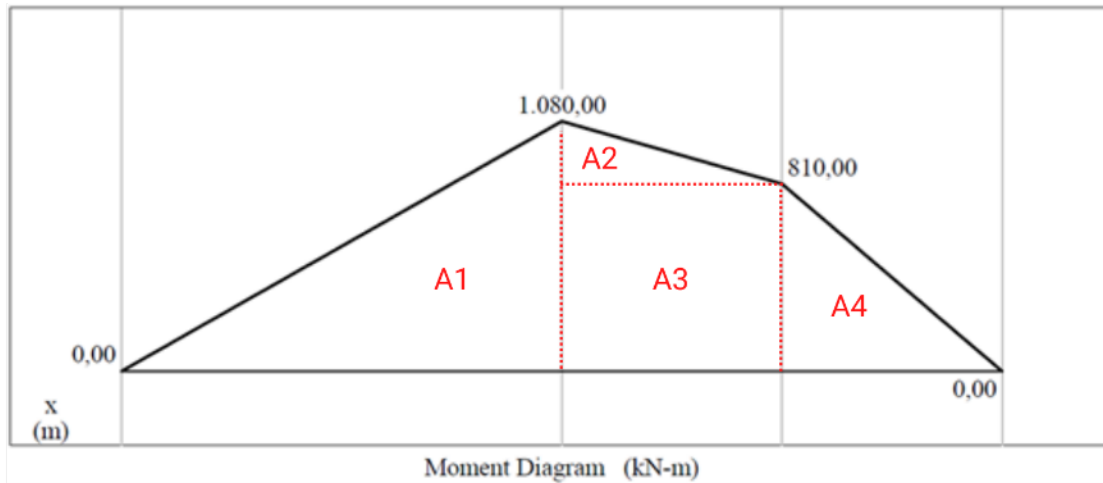
$$R_B(3 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$270 \text{ kN}(3 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$810 \text{ kN m} - M_D = 0$$

$$M_D = 810 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 3.9.



**Figura 3.9. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de momento de área en viga apoyada en los extremos.**

### Pendiente A y B

Empleando la Ecuación 3.2 y 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AB según la Tabla 3.1 se tiene:

$$\theta_{B/A} = \frac{1}{EI} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{6(1080)}{2} + \frac{3(1080 - 810)}{2} + 3(810) + \frac{3(810)}{2} \right]$$

$$\theta_{B/A} = \frac{7290}{EI}$$

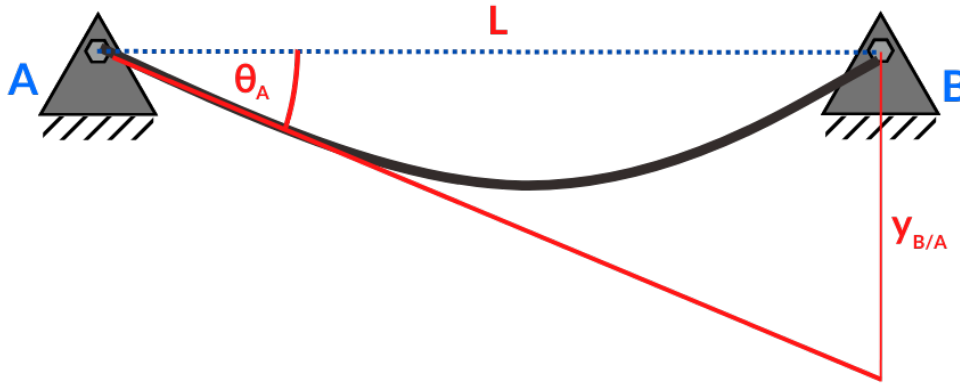
$$y_{B/A} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3 + A_4 \bar{x}_4)$$

$$y_{B/A} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{6(1080)}{2} \left( 6 + \frac{6}{3} \right) + \frac{3(1080 - 810)}{2} \left( 3 + \frac{2(3)}{3} \right) + 3(810) \left( 3 + \frac{3}{2} \right) + \frac{3(810)}{2} \left( \frac{6}{3} \right) \right]$$

$$y_{B/A} = \frac{41310}{EI}$$

Considerando que la pendiente en A se forma hasta la desviación vertical en B como se muestra en la Figura 3.10 se represente mediante la expresión:

$$\tan \theta_A = \frac{y_{B/A}}{L}$$



**Figura 3.10. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo AB en viga apoyada en los extremos.**

Si la pendiente es pequeña  $\tan \theta_A \approx \theta_A$ , entonces

$$\theta_A = \frac{y_{B/A}}{L} = \frac{\frac{41310}{EI}}{12} = \frac{3442.50}{EI} = \frac{3442.50}{12.5 \times 10^6 (0.0192)} = 0.01434 \text{ rad}$$

Como  $\theta_A$  está ubicado en sentido horario se considera negativo.

$$\theta_A = -0.01434 \text{ rad}$$

Considerando que  $\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A$  se puede despejar  $\theta_B$ .

$$\theta_B = \theta_{B/A} + \theta_A = \frac{7290}{EI} + (-0.01434) = \frac{7290}{12.5 \times 10^6 (0.0192)} - 0.01434 = 0.016035 \text{ rad}$$

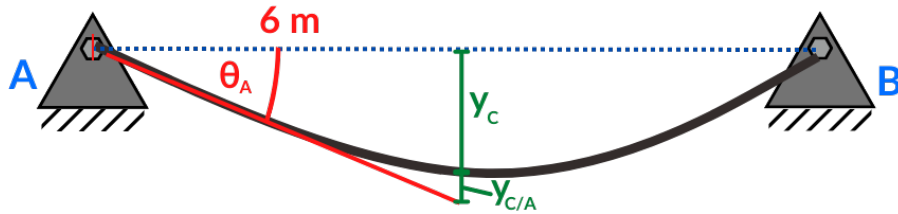
### Deflexión C

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AC según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{C/A} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{6(1080)}{2} \left( \frac{6}{3} \right) \right] = \frac{6480}{EI}$$

Considerando que la pendiente en A se forma hasta la desviación vertical en C como se muestra en la Figura 3.11 se representa mediante la expresión:

$$\tan \theta_A = \frac{y_C + y_{C/A}}{6}$$



**Figura 3.11. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo AC en viga apoyada en los extremos.**

Si la pendiente es pequeña  $\tan \theta_A \approx \theta_A$ , entonces

$$\theta_A = \frac{y_C + y_{C/A}}{6}$$

$$6\theta_A = y_C + y_{C/A}$$

$$y_C = 6\theta_A - y_{C/A}$$

$$y_C = 6(0.01434) - \frac{6480}{12.5 \times 10^6 (0.0192)} = 0.05904 \text{ m} = 59.04 \text{ mm}$$

Como la deflexión va hacia abajo  $y_C$  se considera negativo.

$$y_C = -59.04 \text{ mm}$$

### Deflexión D

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo BD según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{D/B} = \frac{1}{EI} (A_4 \bar{x}_4) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3(810)}{2} \left( \frac{3}{3} \right) \right] = \frac{1215}{EI}$$

Considerando que la pendiente en B se forma hasta la desviación vertical en D como se muestra en la Figura 3.12 se representa mediante la expresión:

$$\tan \theta_B = \frac{y_D + y_{D/B}}{3}$$



**Figura 3.12. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo BD en viga apoyada en los extremos.**

Si la pendiente es pequeña  $\tan \theta_B \approx \theta_B$ , entonces

$$\theta_B = \frac{y_D + y_{D/B}}{3}$$

$$3\theta_B = y_D + y_{D/B}$$

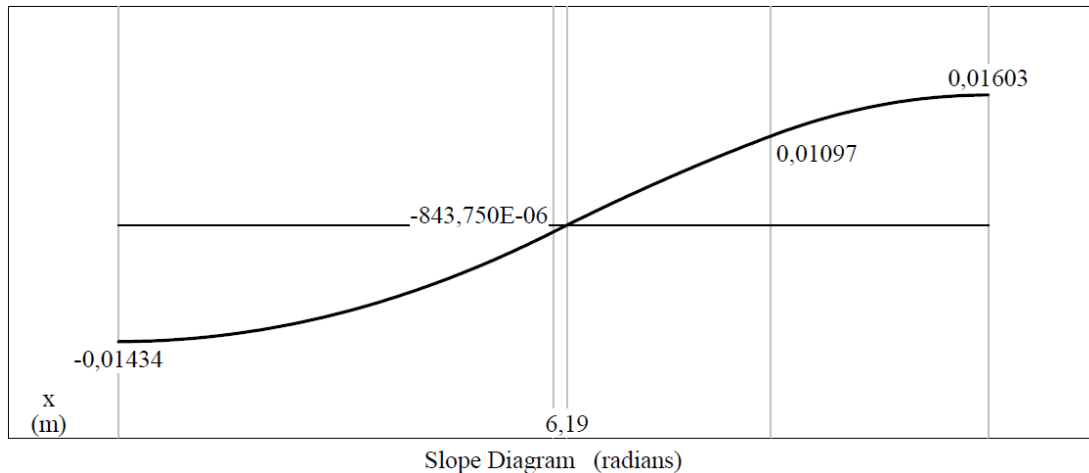
$$y_D = 3\theta_B - y_{D/B}$$

$$y_D = 3(0.016035) - \frac{1215}{12.5 \times 10^6 (0.0192)} = 0.04304 \text{ m} = 43.04 \text{ mm}$$

Como la deflexión va hacia abajo  $y_D$  se considera negativo.

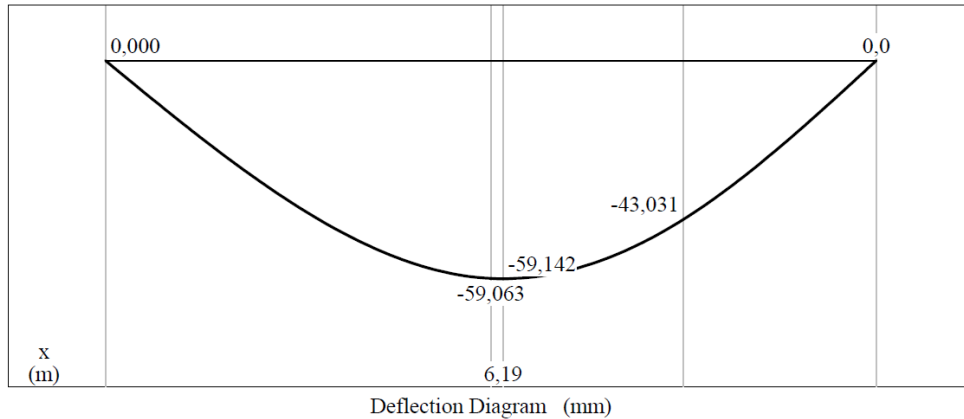
$$y_D = -43.04 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 3.13 y 3.14, siendo coincidentes con lo calculado.



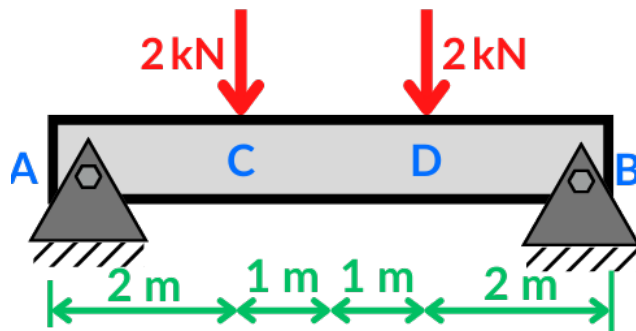
**Figura 3.13. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga apoyada en sus extremos (deflexión).**





**Figura 3.14.** Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga apoyada en sus extremos (pendiente).

**Ejemplo 3.3.** Determine la deflexión máxima mediante el método de momento de área en la viga mostrada en la Figura 3.15. Considere que  $EI = 50 \text{ kN m}^2$ .



**Figura 3.15** Aplicación del método de momento de área en viga apoyada en los extremos (simétrica).

**Datos**

$$EI = 50 \text{ kN m}^2$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$P = 2 \text{ kN}$$

**Resolución**

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 2 \text{ kN}(4 \text{ m}) + 2 \text{ kN}(2 \text{ m}) = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 8 \text{ kN m} + 4 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) + 12 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(6 \text{ m}) = -12 \text{ kN m}$$

$$R_A = \frac{-12 \text{ kN m}}{-6 \text{ m}} = 2 \text{ kN}$$

Por simetría de la viga se deduce:

$$R_B = R_A = 2 \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto C y analizando el momento hacia la izquierda:

$$\Sigma M_C = 0$$

$$-R_A(2 \text{ m}) + M_C = 0$$

$$-2 \text{ kN}(2 \text{ m}) + M_C = 0$$

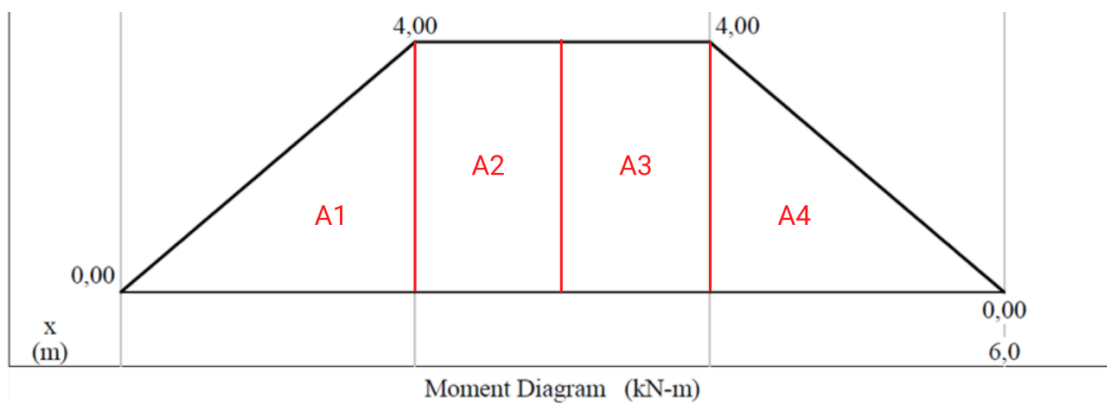
$$-4 \text{ kN m} + M_C = 0$$

$$M_C = 4 \text{ kN m}$$

Si se realiza un corte en el punto C hacia la derecha por simetría de la viga se deduce:

$$M_D = 4 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 3.16.



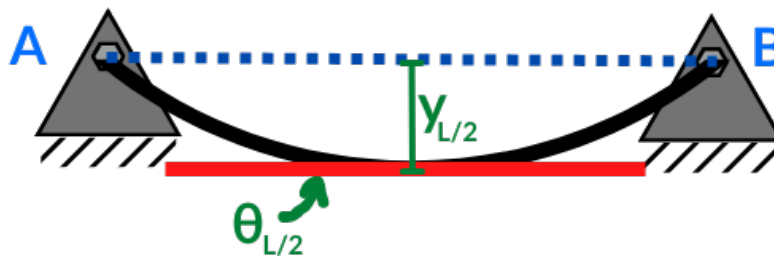
**Figura 3.16. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de momento de área en viga apoyada en los extremos (viga simétrica).**

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo desde la mitad al punto A según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{L/2/A} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2) = \frac{1}{EI} \left( \frac{2(4)}{2} \left( \frac{2(2)}{3} \right) + 1(4) \left( 2 + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{46}{3EI}$$

Considerando que la pendiente en la mitad de la viga es cero la desviación vertical es igual a la deflexión obtenida en ese punto como se muestra en la Figura 3.17, se representa mediante la expresión:

$$y_{L/2/A} = y_{L/2} = \frac{22}{3EI} = \frac{22}{3(50)} = 0.3067 \text{ m} = 306.7 \text{ mm}$$

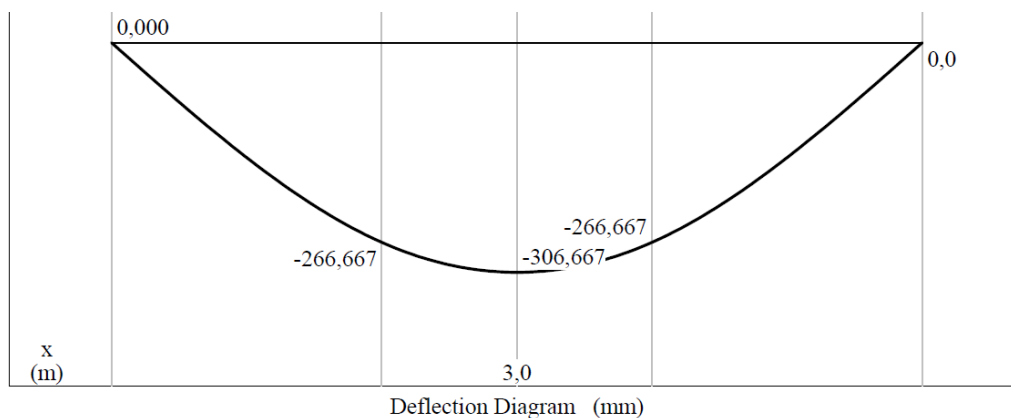


**Figura 3.17. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo AB en viga apoyada en los extremos (viga simétrica).**

Como la deflexión en la mitad de la viga va hacia abajo se considera negativa.

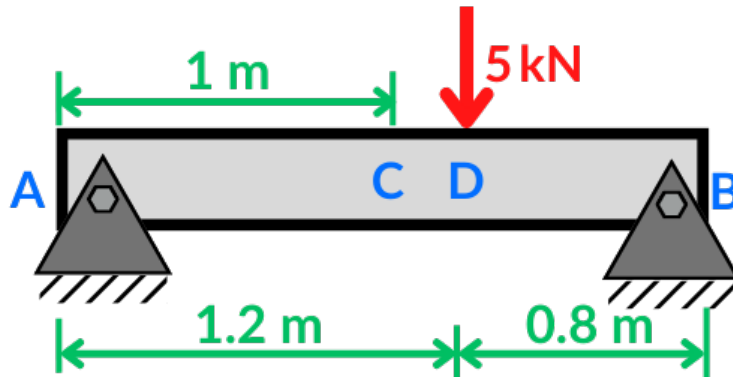
$$y_{L/2} = -306.7 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 3.18, siendo coincidentes con lo calculado.



**Figura 3.18. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga apoyada en sus extremos (deflexión en viga simétrica).**

**Ejemplo 3.4.** Determine la deflexión en el punto C mediante el método de momento de área de la Figura 19. Considere que  $EI = 215 \text{ kN m}^2$



**Figura 3.19** Aplicación del método de momento de área en viga apoyada en los extremos (proporcionalidad geométrica).

**Datos**

$$EI = 215 \text{ kN m}^2$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$P = 5 \text{ kN}$$

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A(2 \text{ m}) + 5 \text{ kN}(0.8 \text{ m}) = 0$$

$$-R_A(2 \text{ m}) + 4 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(2 \text{ m}) = -4 \text{ kN m}$$

$$R_A = \frac{-4 \text{ kN m}}{-2 \text{ m}} = 2 \text{ kN}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 5 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$2 \text{ kN} - 5 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$-3 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_B = 3 \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto D y analizando el momento hacia la derecha:

$$\Sigma M_D = 0$$

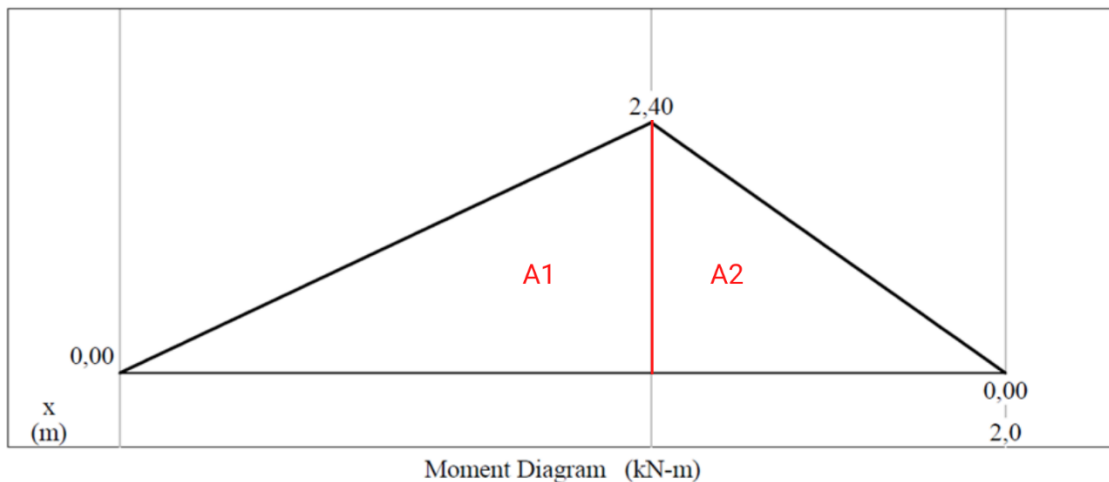
$$R_B(0.8 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$3 \text{ kN}(0.8 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$2.4 \text{ kN m} - M_D = 0$$

$$M_D = 2.4 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 3.20.



**Figura 3.20. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de momento de área en viga apoyada en los extremos (proporcionalidad geométrica).**

El momento en el punto C se puede determinar mediante la proporcionalidad de la pendiente de manera que:

$$\tan \theta = \frac{2.4}{1.2} = \frac{M_C}{1}$$

$$M_C = 2 \text{ kN m}$$

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AB según la Tabla 3.1 se tiene:

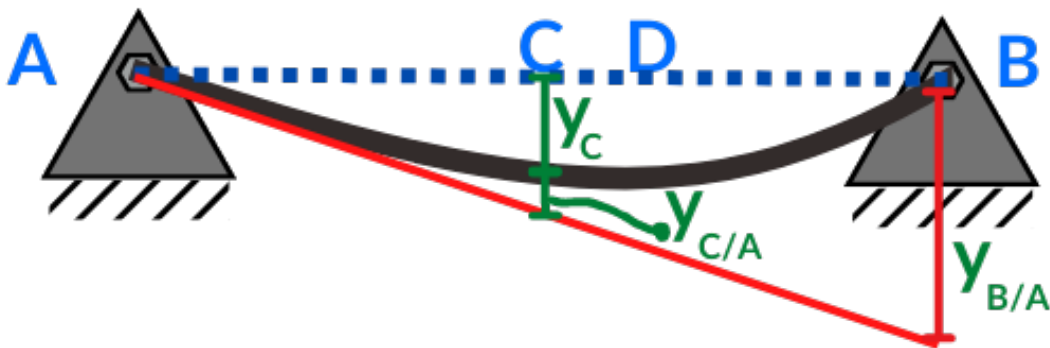
$$y_{B/A} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1.2(2.4)}{2} \left( 0.8 + \frac{1.2}{3} \right) + \frac{0.8(2.4)}{2} \left( \frac{2(0.8)}{3} \right) \right] = \frac{2.24}{EI}$$

Considerando que la pendiente en A se forma hasta la desviación vertical en B y a 1 m como se muestra en la Figura 3.21 se represente la proporcionalidad geométrica mediante la expresión:

$$\tan \theta_A = \frac{y_{B/A}}{L} = \frac{y}{1}$$

$$\frac{\frac{2.24}{EI}}{2} = \frac{y}{1}$$

$$y = \frac{\frac{2.24}{EI}}{2} = \frac{1.12}{EI}$$



**Figura 3.21. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo AB en viga apoyada en los extremos (proporcionalidad geométrica).**

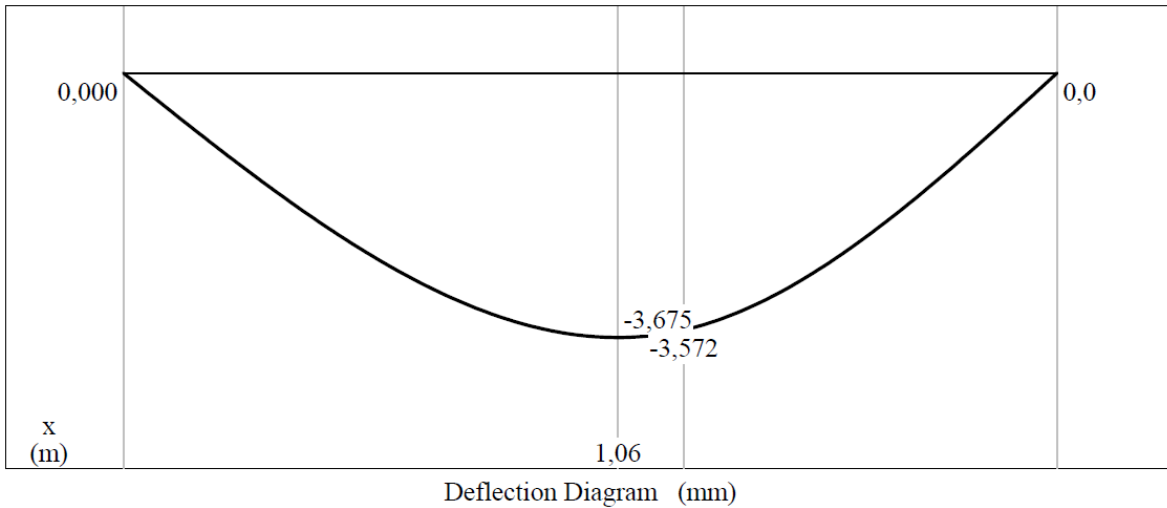
Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AC según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{C/A} = \frac{1}{EI} (A) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1(2)}{2} \left( \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3EI}$$

Considerando que  $y_{C/A} = y - y_C$  se puede despejar  $y_C$ .

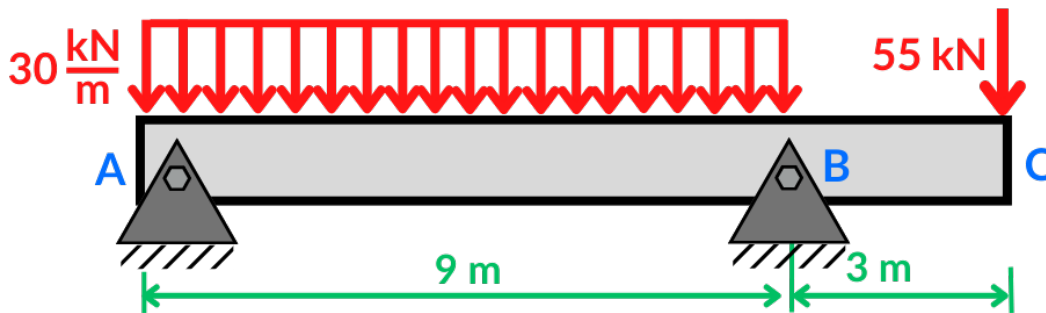
$$y_C = y - y_{C/A} = \frac{1.12}{EI} - \frac{1}{3EI} = \frac{0.7867}{EI} = \frac{0.7867}{215} = 0.003659 \text{ m} = 3.66 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 3.22, siendo coincidente con lo calculado.



**Figura 3.22. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área en viga apoyada en sus extremos por proporcionalidad geométrica (deflexión).**

**Ejemplo 3.5. Determine la deflexión en el punto C mediante el método de momento de área por partes de la Figura 23. Considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 830 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .**



**Figura 3.23 Aplicación del método de momento de área en viga apoyada en los extremos (método por partes).**

**Datos**

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I = 830 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 0.00083 \text{ m}^4$$

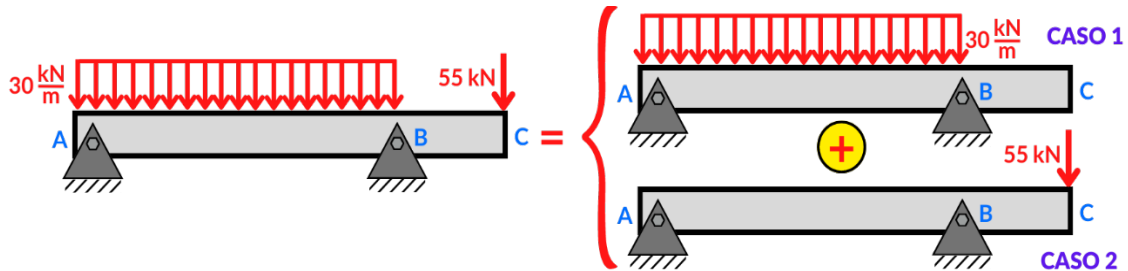
$$L = 12 \text{ m}$$

$$P = 55 \text{ kN}$$

$$q = 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

Se procede a dividir las condiciones de carga para realizar los diagramas de momentos individuales como se muestra en la Figura 3.24.



**Figura 3.24. Representación de división de cargas para aplicación de método de momento de área por partes.**

#### **Caso 1**

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-30 \frac{\text{kN}}{\text{m}} (9 \text{ m}) \left( \frac{9 \text{ m}}{2} \right) + R_B (9 \text{ m}) = 0$$

$$-1215 \text{ kN m} + R_B (9 \text{ m}) = 0$$

$$R_B (9 \text{ m}) = 1215 \text{ kN m}$$

$$R_B = \frac{1215 \text{ kN m}}{9 \text{ m}} = 135 \text{ kN}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 135 \text{ kN} = 0$$

$$R_A = 135 \text{ kN}$$



Realizando un corte en la mitad del tramo AB y analizando el momento hacia la izquierda:

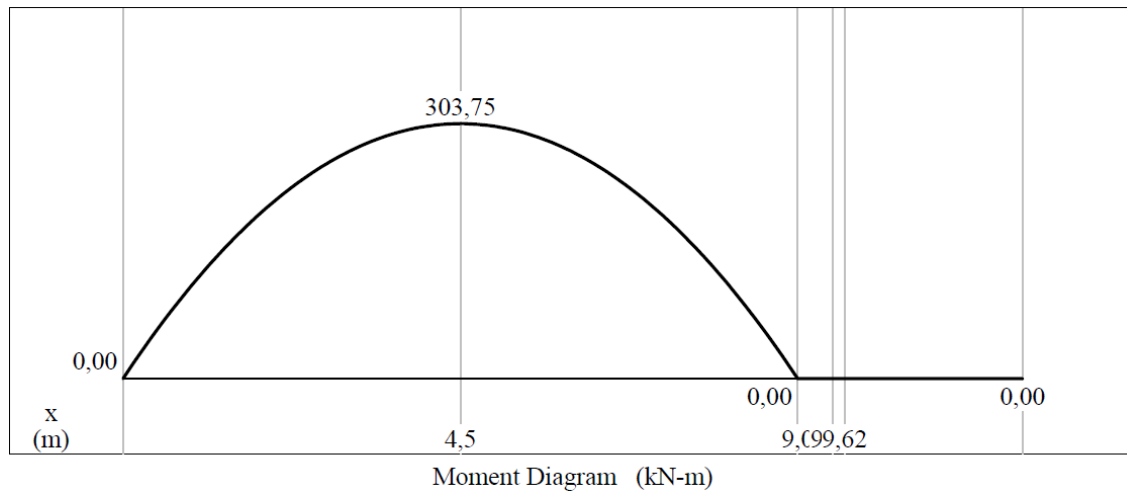
$$\Sigma M_x = 0$$

$$-135 \text{ kN}(4.5 \text{ m}) + 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}(4.5 \text{ m}) \left( \frac{4.5 \text{ m}}{2} \right) + M_x = 0$$

$$-303.75 \text{ kN m} + M_x = 0$$

$$M_x = 303.75 \text{ kN m}$$

Con el valor del momento encontrado y conociendo que existe simetría del tramo AB se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids como se muestra en la Figura 3.25.



**Figura 3.25. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes (Caso 1).**

## Caso 2

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_B(9 \text{ m}) - 55 \text{ kN}(12 \text{ m}) = 0$$

$$R_B(9 \text{ m}) - 660 \text{ kN m} = 0$$

$$R_B(9 \text{ m}) = 660 \text{ kN m}$$

$$R_B = \frac{660 \text{ kN m}}{9 \text{ m}} = \frac{220}{3} \text{ kN}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + \frac{220}{3} \text{ kN} - 55 \text{ kN} = 0$$

$$R_A + \frac{55}{3} \text{ kN} = 0$$

$$R_A = -\frac{55}{3} \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto B y analizando el momento hacia la izquierda:

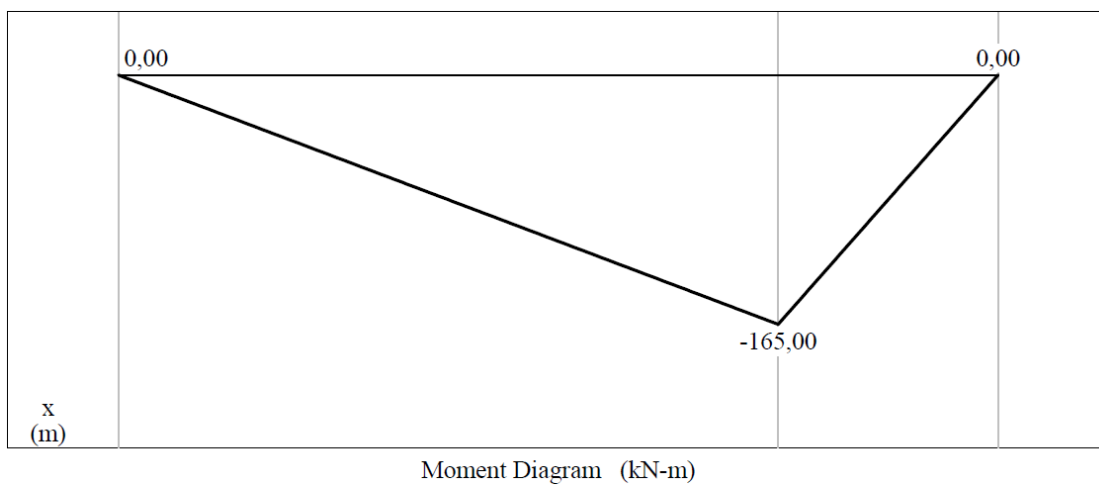
$$\Sigma M_B = 0$$

$$\frac{55}{3} \text{ kN}(9 \text{ m}) - M_B = 0$$

$$165 \text{ kN m} - M_B = 0$$

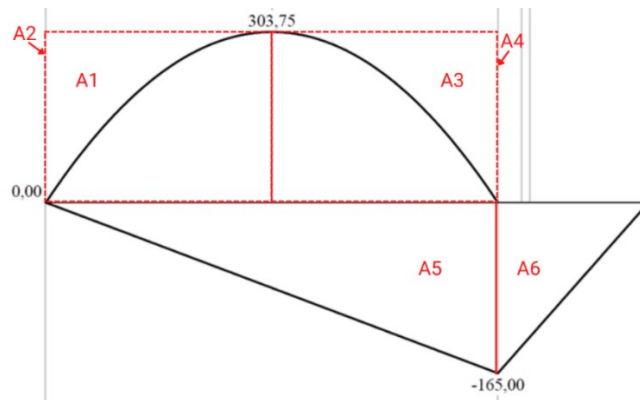
$$M_B = 165 \text{ kN m}$$

Con el valor del momento encontrado se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids como se muestra en la Figura 3.26.



**Figura 3.26. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes (Caso 2).**

Se unifican los diagramas de momentos obtenidos y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 3.27.



**Figura 3.27. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes (Agrupación).**

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AB según la Tabla 3.1 se tiene:

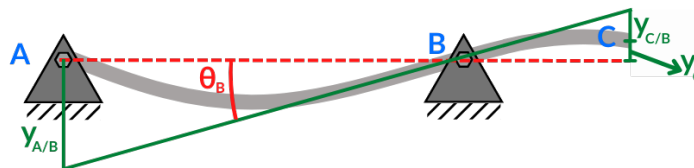
$$y_{A/B} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3 + A_4 \bar{x}_4 + A_5 \bar{x}_5)$$

$$y_{A/B} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{4.5(303.75)}{3} \left( \frac{4.5}{4} \right) + 4.5(303.75) \left( \frac{4.5}{2} \right) - \frac{4.5(303.75)}{3} \left( 4.5 + \frac{3(4.5)}{4} \right) + 4.5(303.75) \left( 4.5 + \frac{4.5}{2} \right) - \frac{9(165)}{2} \left( \frac{2(9)}{3} \right) \right] = \frac{3746.25}{EI}$$

Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores del área correspondiente del tramo BC según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{C/B} = \frac{1}{EI} (A_6 \bar{x}_6) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3(165)}{2} \left( \frac{2(3)}{3} \right) \right] = \frac{495}{EI}$$

Considerando que la pendiente en B se forma hasta la desviación vertical en A como se muestra en la Figura 3.28 se represente mediante la expresión:



**Figura 3.28. Representación de desviación vertical y pendiente de tramo AC en viga empleando método de momento de área por partes.**

$$\tan \theta_B = \frac{y_{A/B}}{9}$$

Si la pendiente es pequeña  $\tan \theta_B \approx \theta_B$ , entonces

$$\theta_B = \frac{y_{A/B}}{9} = \frac{\frac{3746.25}{EI}}{9} = \frac{416.25}{EI}$$

Considerando que la pendiente en B se forma hasta la desviación vertical en C como se muestra en la Figura 3.11 se represente mediante la expresión:

$$\tan \theta_B = \frac{y_{C/B} + y_C}{3}$$

Si la pendiente es pequeña  $\tan \theta_B \approx \theta_B$ , entonces

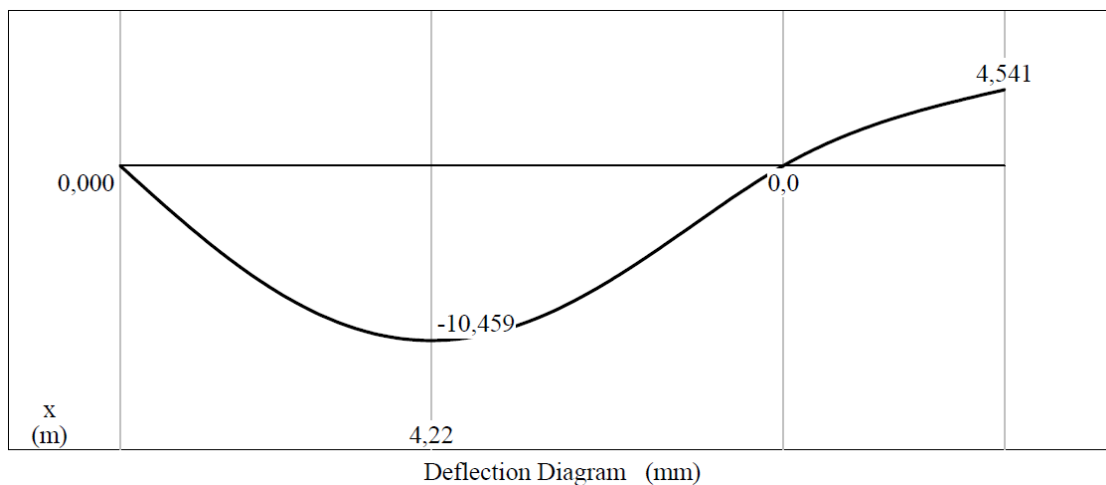
$$\theta_B = \frac{y_{C/B} + y_C}{3}$$

$$3\theta_B = y_{C/B} + y_C$$

$$y_C = 3\theta_B - y_{C/B} = 3\left(\frac{416.25}{EI}\right) - \frac{495}{EI} = \frac{753.75}{EI} = \frac{753.75}{(200 \times 10^6)(0.00083)}$$

$$y_C = 0.004541 \text{ m} = 4.54 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en la Figura 3.29, siendo coincidente con lo calculado.



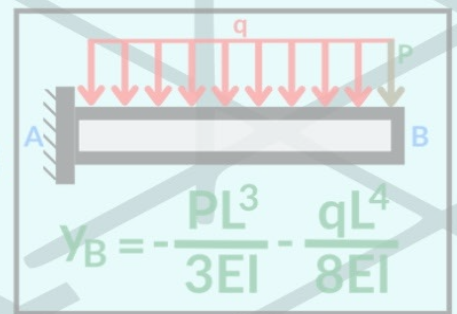
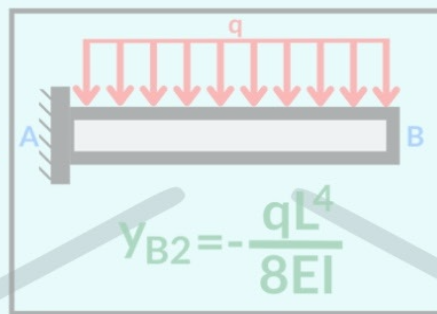
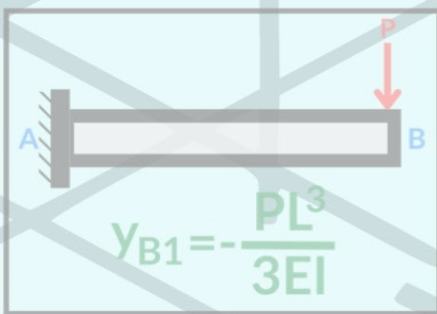
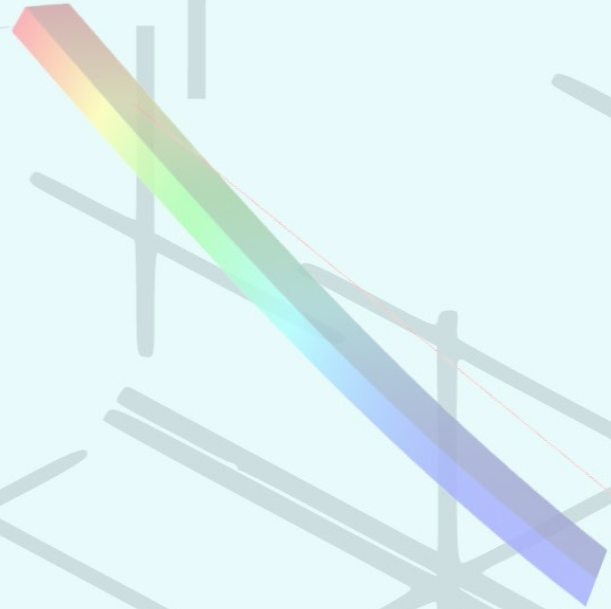
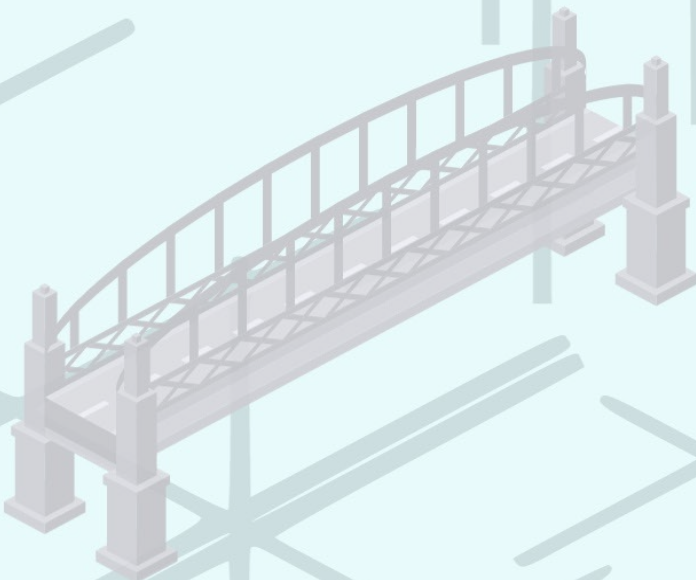
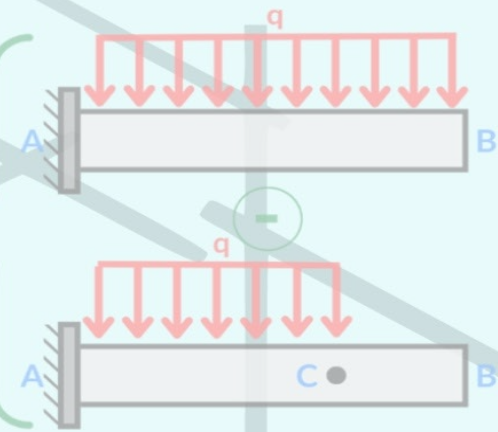
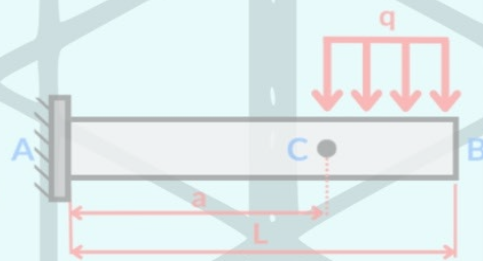
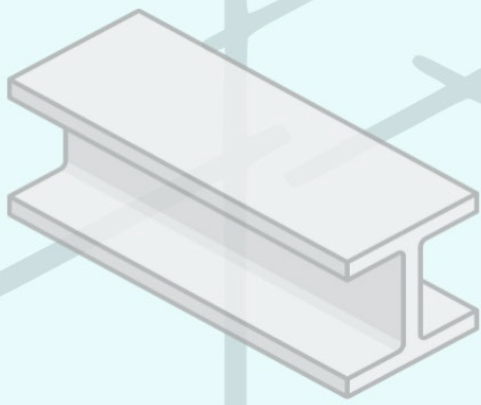
**Figura 3.29. Comprobación mediante MDSolids del método de momento de área por partes (deflexión).**

### 3.5. Problemas

En los problemas 3.1 a 3.10 aplique el método de momento de área tradicional y por partes para determinar la deflexión y pendiente según se solicite. Considere EI constante.

<p>Ejercicio 3.1 Encuentre la deflexión y pendiente en la mitad de la viga</p>	<p>Ejercicio 3.2 Encuentre la deflexión y pendiente en la mitad de la viga</p>
<p>Ejercicio 3.3 Encuentre la deflexión y pendiente en la mitad de la viga</p>	<p>Ejercicio 3.4 Encuentre la deflexión en cada carga de la viga</p>
<p>Ejercicio 3.5 Encuentre la deflexión máxima en la viga</p>	<p>Ejercicio 3.6 Encuentre la deflexión y pendiente máxima en la viga</p>
<p>Ejercicio 3.7 Encuentre la deflexión y pendiente máxima en la viga</p>	<p>Ejercicio 3.8 Encuentre la deflexión y pendiente máxima en la viga</p>

<p>Ejercicio 3.9 Encuentre la deflexión y pendiente en la mitad de la viga</p>	<p>Ejercicio 3.10 Encuentre la deflexión y pendiente en los extremos de la viga</p>



# CAPÍTULO IV

## MÉTODO DE VIGA CONJUGADA

## Objetivos

- Profundizar en el estudio de la viga conjugada como herramienta fundamental en el análisis de deflexiones, proporcionando a los lectores una comprensión exhaustiva y práctica de esta técnica avanzada en ingeniería estructural.
- Explorar los fundamentos teóricos de la viga conjugada, centrándose en la relación entre el esfuerzo cortante y la pendiente de la línea elástica, y su aplicación en la determinación de las deflexiones en vigas.
- Guiar a los lectores a través del proceso para el cálculo de la viga conjugada y su aplicación en el análisis de deflexiones en vigas sometidas a cargas variables y distribuidas, destacando la simplificación de cálculos mediante esta técnica.
- Demostrar la aplicabilidad práctica de la viga conjugada en el análisis de deflexiones mediante ejemplos diversos y problemas representativos, permitiendo a los lectores comprender su utilidad en situaciones reales de ingeniería mecánica.
- Fomentar la capacidad de los lectores para evaluar y validar los resultados obtenidos a través del uso de la viga conjugada en el análisis de deflexiones, enfatizando la importancia de verificar los cálculos y comprender la precisión y las limitaciones inherentes a esta técnica.

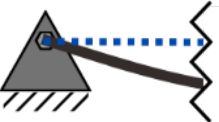
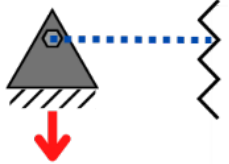
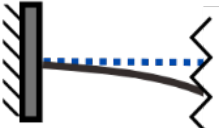
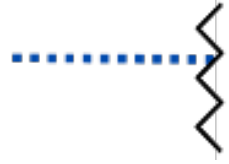

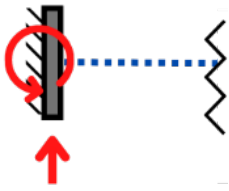

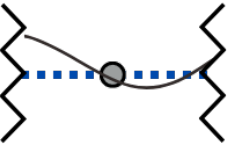




## 4.1. Generalidades

La base de este método depende de la modificación del método momento de área, resultando conveniente emplearlo para las vigas de EI variable, a diferencia del método precedente que se recomienda para las vigas de EI constante, complementándose en dos teoremas principales (R.K. Kaushik, 2019). Este método fue desarrollado por Otto Mohr en 1868, el cual consiste en crear una viga ficticia, denominada viga conjugada, que posee la misma longitud que la viga real, pero apoyada exteriormente y conectada interiormente de tal forma que si la viga conjugada se carga con el diagrama  $\frac{M}{EI}$  de la viga real, el cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga conjugada son iguales, respectivamente, a la pendiente y la flecha en el punto correspondiente de la viga real (Kassimali, 2020a).

Para realizar la conversión de una viga real a ficticia, se debe emplear las configuraciones con sus condiciones de carga y frontera que se muestran en la Tabla 4.1 Algunos ejemplos de conversiones de viga real a ficticia se ilustran en la Figura 4.1 a modo de guía para la aplicación del método para el lector.

**Tabla 4.1. Representación de casos de viga real y conjugada.**

Viga real	Pendiente y deformación	Fuerza cortante y momento flector	Viga ficticia
	$\theta \neq 0, y = 0$	$V \neq 0, M = 0$	
	$\theta = 0, y = 0$	$V = 0, M = 0$	
	$\theta \neq 0, y \neq 0$	$V \neq 0, M \neq 0$	
	$\theta \neq 0$ además, es continua, $y \neq 0$	$V \neq 0$ además, es continua, $M \neq 0$	
	$\theta \neq 0$ además, es discontinua, $y \neq 0$	$V \neq 0$ además, es discontinua, $M \neq 0$	

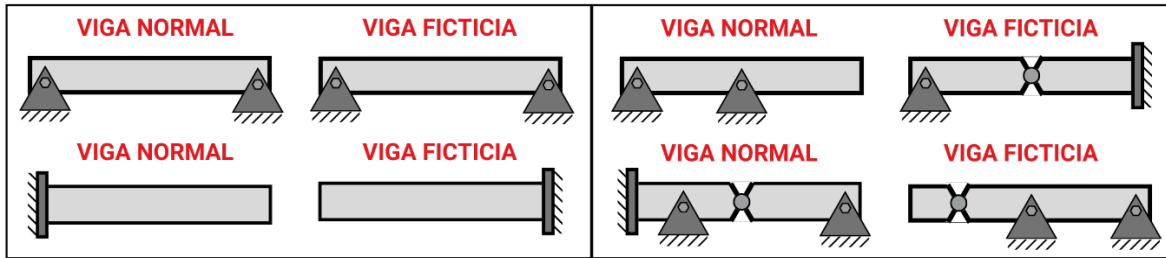


Figura 4.1. Aplicación de casos de viga normal a ficticia

#### 4.2. Teorema 1

El primer teorema expresa que "la pendiente en cualquier sección de una viga cargada respecto al eje original de la viga es igual al cortante en la viga conjugada en la sección correspondiente" (Rajput, 2018). Esta relación se puede expresar mediante la Ecuación 4.1 y 4.2.

$$w_{\text{conj}} = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. 4.1})$$

$$V_{\text{conj}} = \int w dx = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{dy}{dx} = \theta \quad (\text{Ec. 4.2})$$

#### 4.3. Teorema 2

El segundo teorema expresa que "la deflexión en una sección cualquiera de una viga cargada, respecto a la posición original, es igual al momento flector en la sección correspondiente de la viga conjugada" (Rajput, 2018). Esta relación se puede expresar mediante la Ecuación 4.3 y 4.4.

$$V_{\text{conj}} = \int \frac{M}{EI} dx \quad (\text{Ec. 4.3})$$

$$M_{\text{conj}} = \int \int \frac{M}{EI} dx = y \quad (\text{Ec. 4.4})$$

#### 4.4. Convención de signos.

Para la aplicación del método de la viga conjugada deben emplearse ciertas convenciones y criterios (Gamio, 2014).

- Si el diagrama de momentos es positivo, la carga de la viga conjugada se considera hacia abajo.
- Si el diagrama de momentos es negativo, la carga de la viga conjugada se considera hacia arriba.
- Si la fuerza cortante y el momento flector de la viga conjugada son positivos, la rotación se realiza en sentido horario y la deflexión va hacia abajo respectivamente.

- Si la fuerza cortante y el momento flector de la viga conjugada son negativos, la rotación se realiza en sentido antihorario y la deflexión va hacia arriba respectivamente.

**Ejemplo 4.1.** Determine la deflexión y pendiente en los puntos C y D de la viga mostrada en la Figura 4.2 empleando el método de la viga conjugada. Considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $I = 150 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

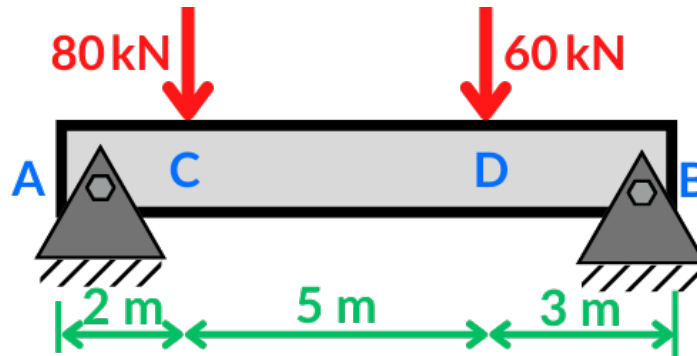


Figura 4.2 Aplicación del método de la viga conjugada en viga apoyada en los extremos

### Datos

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I = 150 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$P_1 = 80 \text{ kN}$$

$$P_2 = 60 \text{ kN}$$

### Resolución

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A(10 \text{ m}) + 80 \text{ kN}(8 \text{ m}) + 60 \text{ kN}(3 \text{ m}) = 0$$

$$-R_A(10 \text{ m}) + 640 \text{ kN m} + 180 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(10 \text{ m}) + 820 \text{ kN m} = 0$$

$$-R_A(10 \text{ m}) = -820 \text{ kN m}$$

$$R_A = \frac{-820 \text{ kN m}}{-10 \text{ m}} = 82 \text{ kN}$$

Aplicando sumatoria de Fuerzas en y se tiene:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 80 \text{ kN} - 60 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$82 \text{ kN} - 80 \text{ kN} - 60 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$-58 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_B = 58 \text{ kN}$$

Realizando un corte en el punto C y analizando el momento hacia la izquierda:

$$\Sigma M_C = 0$$

$$-82 \text{ kN}(2 \text{ m}) + M_C = 0$$

$$-164 \text{ kN m} + M_C = 0$$

$$M_C = 164 \text{ kN m}$$

Realizando un corte en el punto D y analizando el momento hacia la derecha:

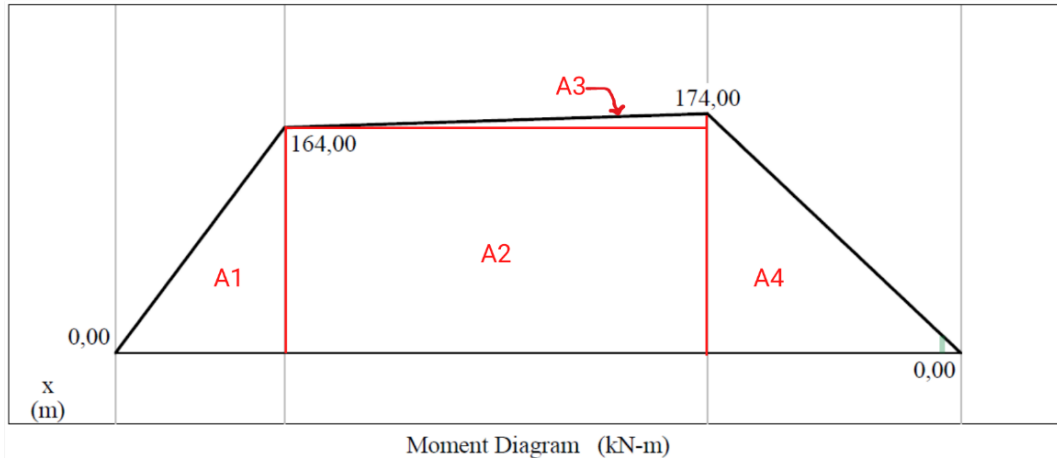
$$\Sigma M_D = 0$$

$$58 \text{ kN}(3 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$174 \text{ kN m} - M_D = 0$$

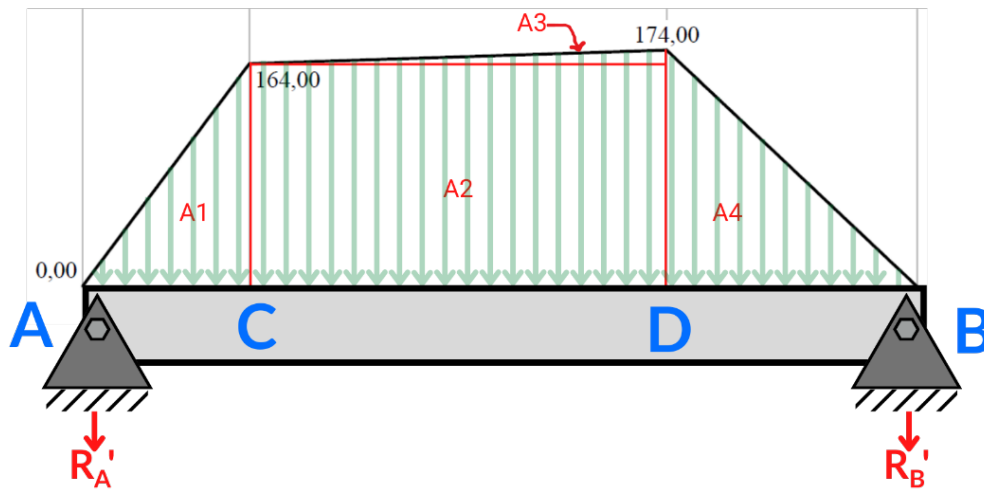
$$M_D = 174 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 4.3.



**Figura 4.3. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de viga conjugada en viga apoyada en los extremos.**

Se puede identificar que el diagrama de momentos tiene signo positivo por lo que la carga de la viga conjugada actuaría hacia abajo, distribuyéndose uniformemente sobre toda el área proyectada (color verde) como se muestra en la Figura 4.4. Además, al convertir la viga, en el caso de los apoyos en los extremos, se mantienen los apoyos y actúan fuerzas hacia abajo como se indica en la Tabla 4.1, que se han denominado como  $R_A'$  y  $R_B'$ .



**Figura 4.4. Representación de cargas para viga conjugada en viga apoyada en los extremos.**

Una vez obtenida la viga conjugada con su distribución de cargas se procede analizar estáticamente, identificando las reacciones en los apoyos.

Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A'(10) - \frac{2(164)}{2} \left(8 + \frac{2}{3}\right) - 5(164) \left(3 + \frac{5}{2}\right) - \frac{5(174 - 164)}{2} \left(3 + \frac{5}{3}\right) - \frac{3(174)}{2} \left(\frac{2(3)}{3}\right) = 0$$

$$-10R_A' - \frac{4264}{3} - 4510 - \frac{350}{3} - 522 = 0$$

$$-6570 - 10R_A' = 0$$

$$-10R_A' = 6570$$

$$R_A' = -\frac{6570}{10} = -657 \text{ kN m}^2 (\uparrow)$$

Realizando sumatoria de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A' - \frac{2(164)}{2} - 5(164) - \frac{5(174 - 164)}{2} - \frac{3(174)}{2} - R_B' = 0$$

$$657 - 164 - 820 - 25 - 261 - R_B' = 0$$

$$-613 - R_B' = 0$$

$$R_B' = -613 \text{ kN m}^2 (\uparrow)$$

Realizando un corte en el punto C en la viga conjugada y analizando la fuerza cortante hacia la izquierda:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A' - \frac{2(164)}{2} - V_C = 0$$

$$657 - 164 - V_C = 0$$

$$493 - V_C = 0$$

$$V_C = 493 \text{ kN m}^2$$

Realizando un corte en el punto D en la viga conjugada y analizando la fuerza cortante hacia la derecha:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-\frac{3(174)}{2} + R_B' - V_D = 0$$

$$-261 + 613 - V_D = 0$$

$$352 - V_D = 0$$

$$V_D = 352 \text{ kN m}^2$$

Realizando un corte en el punto C en la viga conjugada y analizando el momento hacia la izquierda:

$$\Sigma M_C = 0$$

$$-R_A'(2) + \frac{2(164)}{2} \left(\frac{2}{3}\right) + M_C = 0$$

$$-2(657) + \frac{328}{3} + M_C = 0$$

$$-\frac{3614}{3} + M_C = 0$$

$$M_C = \frac{3614}{3} = 1204.67 \text{ kN m}^3$$

Realizando un corte en el punto D en la viga conjugada y analizando el momento hacia la derecha:

$$\Sigma M_D = 0$$

$$-\frac{3(174)}{2} \left(\frac{3}{3}\right) + R_B'(3) - M_D = 0$$

$$-261 + 613(3) - M_D = 0$$

$$1578 - M_D = 0$$

$$M_D = 1578 \text{ kN m}^3$$

Empleando la Ecuación 4.1 se tiene obtienen las pendientes en C y D:

$$\theta_C = \frac{V_{\text{conj-C}}}{EI} = \frac{493}{200 \times 10^6 (1.5 \times 10^{-4})} = 0.01643 \text{ rad}$$

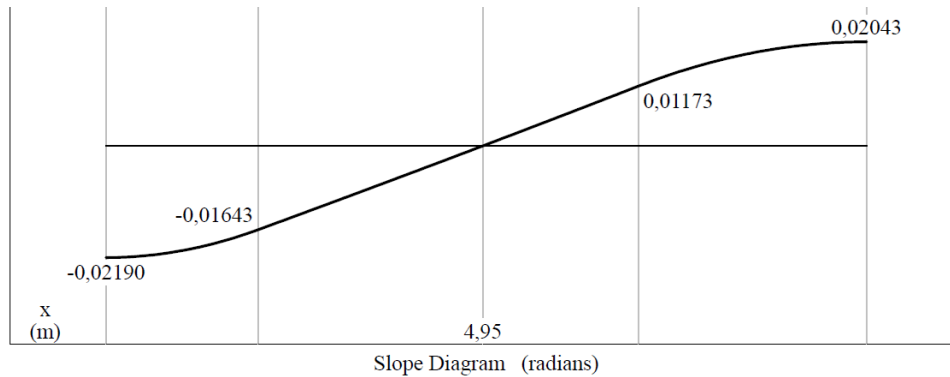
$$\theta_D = \frac{V_{\text{conj-D}}}{EI} = \frac{352}{200 \times 10^6 (1.5 \times 10^{-4})} = 0.01173 \text{ rad}$$

Empleando la Ecuación 4.2 se tiene obtienen las deflexiones en C y D:

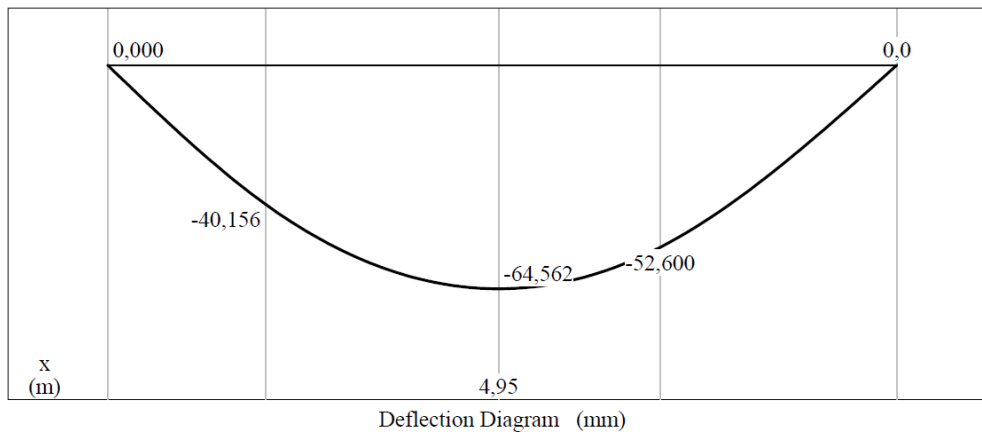
$$y_C = \frac{M_{\text{conj-C}}}{EI} = \frac{1204.67}{200 \times 10^6 (1.5 \times 10^{-4})} = 0.04016 \text{ m} = 40.16 \text{ mm}$$

$$y_D = \frac{M_{\text{conj-D}}}{EI} = \frac{1578}{200 \times 10^6 (1.5 \times 10^{-4})} = 0.0526 \text{ m} = 52.26 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 4.5 y 4.6, siendo coincidente con lo calculado.



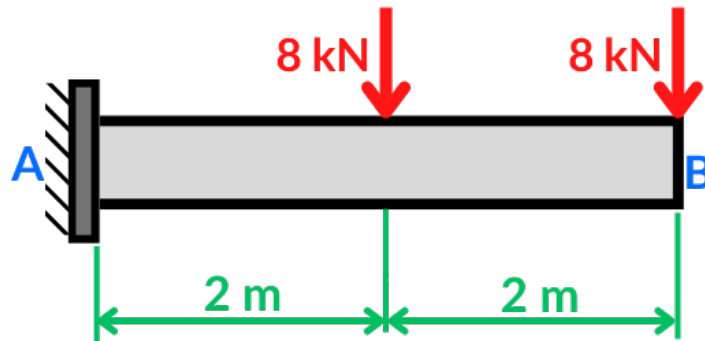
**Figura 4.5. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga apoyada en los extremos (pendiente).**



**Figura 4.6. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga apoyada en los extremos (deflexión).**



**Ejemplo 4.2.** Determine la deflexión y pendiente en el punto B de la viga mostrada en la Figura 4.7 empleando el método de la viga conjugada. Considere que EI como constante.



**Figura 4.7** Aplicación del método de la viga conjugada en viga empotrada

**Datos**

$$L = 4 \text{ m}$$

$$P = 8 \text{ kN}$$

**Resolución**

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A - 8 \text{ kN}(2 \text{ m}) - 8 \text{ kN}(4 \text{ m}) = 0$$

$$M_A - 16 \text{ kN m} - 32 \text{ kN m} = 0$$

$$M_A - 48 \text{ kN m} = 0$$

$$M_A = 48 \text{ kN m}$$

Realizando momento desde la mitad de la viga hacia la derecha:

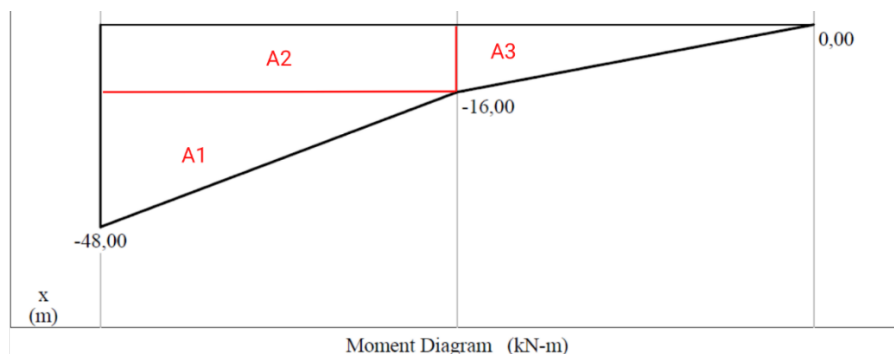
$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_x - 8 \text{ kN}(2 \text{ m}) = 0$$

$$M_x - 16 \text{ kN m} = 0$$

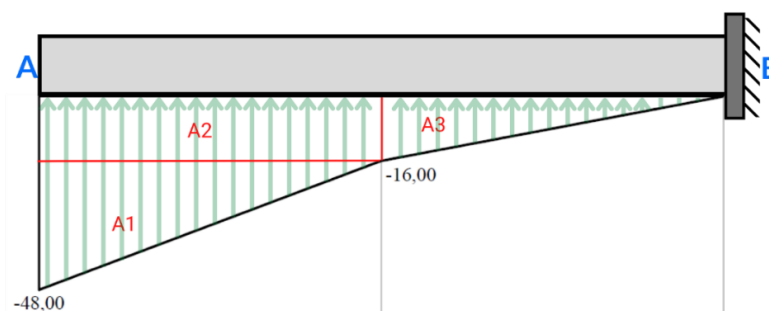
$$M_x = 16 \text{ kN m}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 4.8.



**Figura 4.8. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de viga conjugada en viga empotrada.**

Se puede identificar que el diagrama de momentos tiene signo negativo por lo que la carga de la viga conjugada actuaría hacia arriba, distribuyéndose uniformemente sobre toda el área proyectada (color verde) como se muestra en la Figura 4.9. Además, al convertir la viga, en el caso del empotramiento, se sustituye por un segmento libre, y el extremo libre por un empotramiento se indica en la Tabla 4.1.



**Figura 4.9. Representación de cargas para viga conjugada en viga empotrada.**

Una vez obtenida la viga conjugada con su distribución de cargas se procede a analizar estáticamente, identificando las reacciones en los apoyos.

Realizando momento desde el punto B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \\ -\frac{2(48 - 16)}{2} \left( 2 + \frac{2(2)}{3} \right) - 2(16) \left( 2 + \frac{3}{2} \right) - \frac{2(16)}{2} \left( \frac{2(2)}{3} \right) + M_B' &= 0 \\ -\frac{320}{3} - 112 - \frac{64}{3} + M_B' &= 0 \end{aligned}$$

$$-240 + M_B' = 0$$

$$M_B' = 240 \text{ kNm}^3$$

Realizando un corte en el punto B en la viga conjugada y analizando la fuerza cortante hacia la izquierda:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-\frac{2(48 - 16)}{2} - 2(16) - \frac{2(16)}{2} + V_B = 0$$

$$-32 - 32 - 16 + V_B = 0$$

$$-80 + V_B = 0$$

$$V_B = 80 \text{ kN m}^2$$

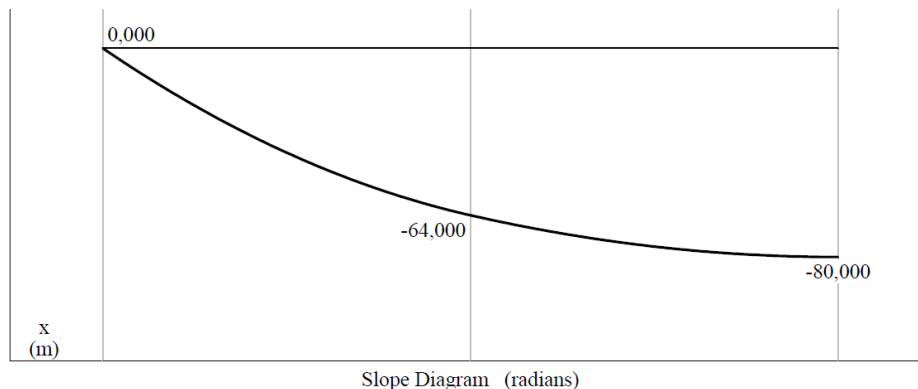
Empleando la Ecuación 4.1 se tiene obtiene la pendiente en B:

$$\theta_B = \frac{V_{\text{conj-B}}}{EI} = \frac{80}{EI}$$

Empleando la Ecuación 4.2 se tiene obtiene la deflexión en B:

$$y_B = \frac{M_{\text{conj-B}}}{EI} = \frac{240 \text{ m}}{EI} = \frac{240000 \text{ mm}}{EI}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 4.10 y 4.11, siendo coincidente con lo calculado.



**Figura 4.10. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga empotrada (pendiente).**

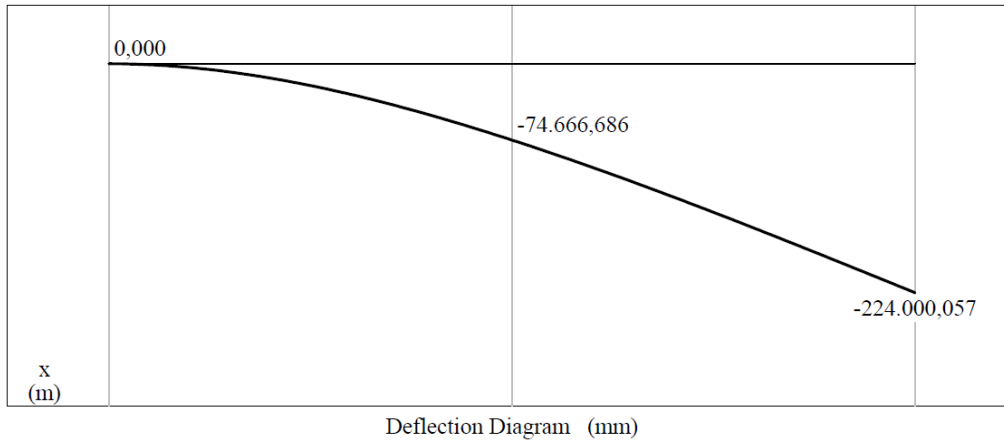


Figura 4.11. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga empotrada (deflexión).

Ejemplo 4.3. Determine la deflexión y pendiente en los puntos C y D de la viga mostrada en la Figura 4.12 empleando el método de la viga conjugada. Considere que  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $I = 415 \times 10^6 \text{ mm}^4$

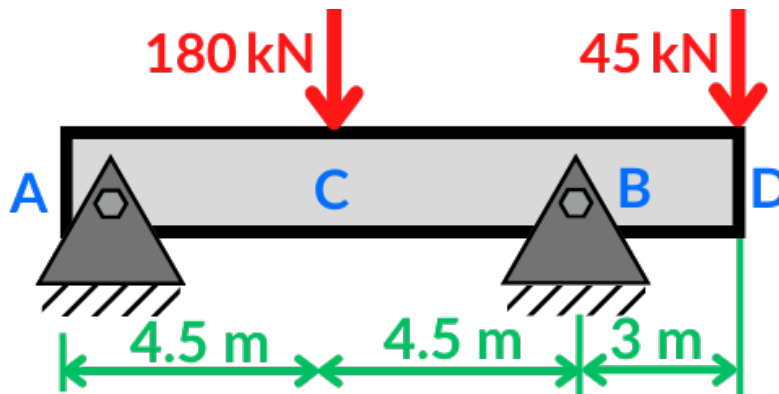


Figura 4.12 Aplicación del método de la viga conjugada en viga apoyada con extremo libre.

Datos

$$L = 12 \text{ m}$$

$$P_1 = 180 \text{ kN}$$

$$P_2 = 45 \text{ kN}$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I = 415 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 4.15 \times 10^{-4} \text{ mm}^4$$

### **Resolución**

Realizando momento desde el punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-180 \text{ kN}(4.5 \text{ m}) + R_B(9 \text{ m}) - 45 \text{ kN}(12 \text{ m}) = 0$$

$$-810 \text{ kN m} + R_B(9 \text{ m}) - 540 \text{ kN m} = 0$$

$$R_B(9 \text{ m}) - 1350 \text{ kN m} = 0$$

$$R_B(9 \text{ m}) = 1350 \text{ kN m}$$

$$R_B = \frac{1350 \text{ kN m}}{9 \text{ m}} = 150 \text{ kN}$$

Realizando sumatoria de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 180 \text{ kN} + R_B - 45 \text{ kN} = 0$$

$$R_A - 180 \text{ kN} + 150 \text{ kN} - 45 \text{ kN} = 0$$

$$R_A - 75 \text{ kN} = 0$$

$$R_A = 75 \text{ kN}$$

Realizando momento desde el punto C hacia la izquierda

$$\Sigma M_C = 0$$

$$M_C - 75 \text{ kN}(4.5 \text{ m}) = 0$$

$$M_C - 337.5 \text{ kN m} = 0$$

$$M_C = 337.5 \text{ kN m}$$

Realizando momento desde el punto B hacia la derecha

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_B - 45 \text{ kN}(3 \text{ m}) = 0$$

$$M_B - 135 \text{ kN m} = 0$$

$$M_B = 135 \text{ kN m}$$

Realizando momento entre el punto B y C hacia la izquierda para determinar cuando  $M_x = 0$

$$\Sigma M_x = 0$$

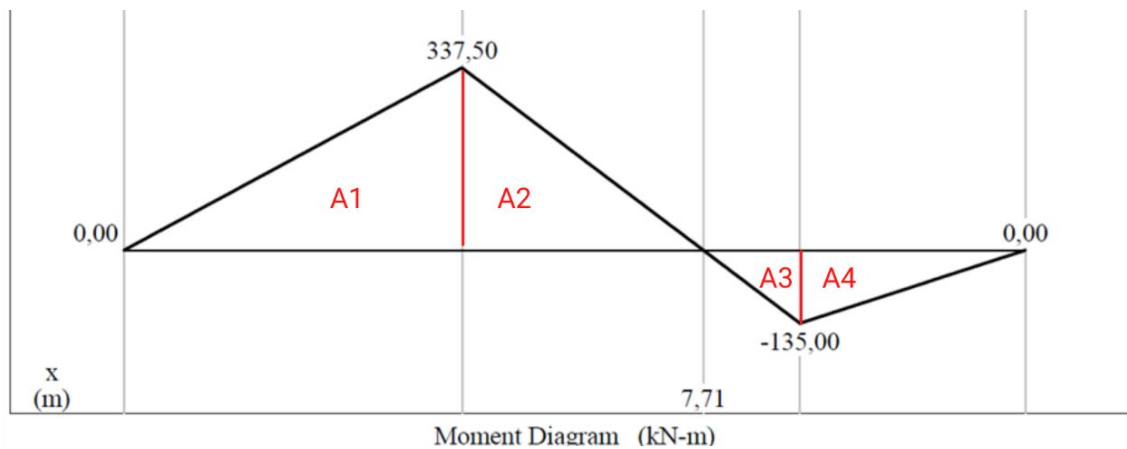
$$-R_A x + 180(x - 4.5) + M_x = 0$$

$$-75x + 180x - 810 + 0 = 0$$

$$105x - 810 = 0$$

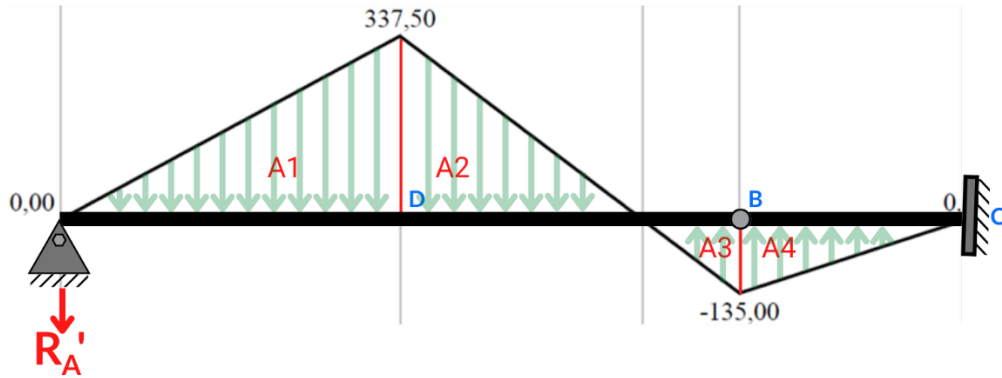
$$x = \frac{810}{105} = \frac{54}{7} = 7.71 \text{ mm}$$

Con los valores de momentos encontrados se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids y se dividen en áreas como se muestra en la Figura 4.13.



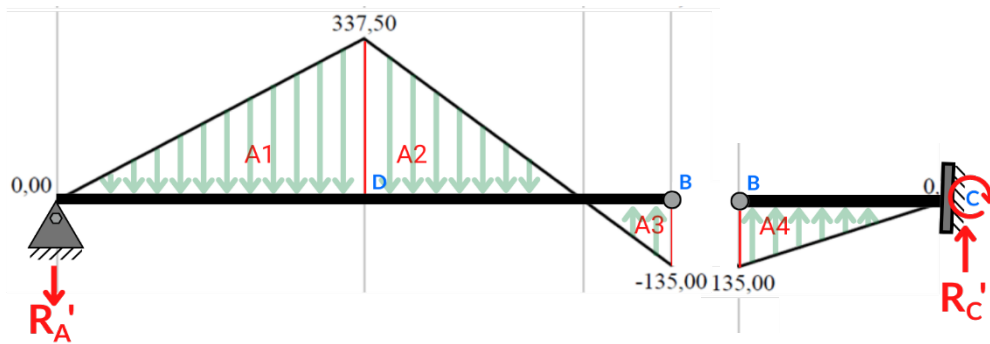
**Figura 4.13. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para método de viga conjugada en viga apoyada con extremo libre.**

Se puede identificar que el diagrama de momentos tiene signo positivo hasta los 9 m por lo que la carga de la viga conjugada actuaría hacia abajo, y de 9 a 12 m tiene signo negativo por lo que actuaría hacia arriba distribuyéndose uniformemente sobre toda el área proyectada (color verde) como se muestra en la Figura 4.14. Además, al convertir la viga, en el caso del apoyo B, se sustituye por un apoyo interno y el extremo libre por un empotramiento se indica en la Tabla 4.1.



**Figura 4.14. Representación de cargas para viga conjugada en viga apoyada con extremo libre.**

Como se posee un apoyo interno se puede dividir la estructura en dos segmentos AB y BC como se muestra en la Figura 4.15 para resolverlo mediante estática.



**Figura 4.15. Representación de cargas para viga conjugada en viga apoyada con extremo libre (división en apoyos internos).**

Realizando momento en el punto B del tramo AB:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A'(9) + \frac{4.5(337.5)}{2} \left( 4.5 + \frac{4.5}{3} \right) + \frac{(7.71 - 4.5)(337.5)}{2} \left( 4.5 - \frac{7.71 - 4.5}{3} \right) - \frac{(9 - 7.71)(135)}{2} \left( \frac{9 - 7.71}{3} \right) = 0$$

$$9R_A' + 4556.25 + 1857.99 - 37.44 = 0$$

$$9R_A' + 6376.80 = 0$$

$$9R_A' = -6376.80$$

$$R_A' = -\frac{6376.80}{9} = 708.54 \text{ kN m}^2 (\uparrow)$$

Realizando sumatoria de fuerzas en y para la viga completa:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A' - \frac{4.5(337.5)}{2} - \frac{(7.71 - 4.5)(337.5)}{2} + \frac{(9 - 7.71)(135)}{2} + \frac{3(135)}{2} + R_C' = 0$$

$$708.54 - 759.38 - 541.68 + 87.08 + 202.5 + R_C' = 0$$

$$-302.94 + R_C' = 0$$

$$R_C' = 302.94 \text{ kN m}^2$$

Como la fuerza cortante en C corresponde a la reacción, se tiene:

$$V_C = R_C' = 302.94 \text{ kN m}^2$$

Realizando un corte en el punto D en la viga conjugada y analizando la fuerza cortante hacia la izquierda:

$$R_A' - \frac{4.5(337.5)}{2} + V_D = 0$$

$$708.54 - 759.38 + V_D = 0$$

$$-50.84 + V_D = 0$$

$$V_D = 50.84 \text{ kN m}^2$$

Realizando un corte en el punto D en la viga conjugada y analizando el momento hacia la izquierda:

$$-708.54(4.5) + \frac{4.5(337.5)}{2} \left(\frac{4.5}{3}\right) + M_D = 0$$

$$-3188.43 + 1139.06 + M_D = 0$$

$$-2049.37 + M_D = 0$$

$$M_D = 2049.37 \text{ kN m}^3$$

Realizando un corte en el punto C en la viga conjugada y analizando el momento



$$-708.54(12) + \frac{4.5(337.5)}{2} \left(7.5 + \frac{4.5}{3}\right) + \frac{(7.71 - 4.5)(337.5)}{2} \left(7.5 - \frac{7.71 - 4.5}{3}\right) - \frac{(9 - 7.71)(135)}{2} \left(3 + \frac{9 - 7.71}{3}\right) - \frac{3(135)}{2} \left(\frac{2(3)}{3}\right) - M_C = 0$$

$$-8502.48 + 6834.38 + 3483.05 - 298.67 - 405 - M_C = 0$$

$$1111.28 - M_C = 0$$

$$M_C = 1111.28 \text{ kN m}^3$$

Empleando la Ecuación 4.1 se tiene obtiene las pendientes en C y D:

$$\theta_C = \frac{V_{\text{conj-C}}}{EI} = \frac{302.94}{200 \times 10^6 (4.15 \times 10^{-4})} = 0.003650 \text{ rad}$$

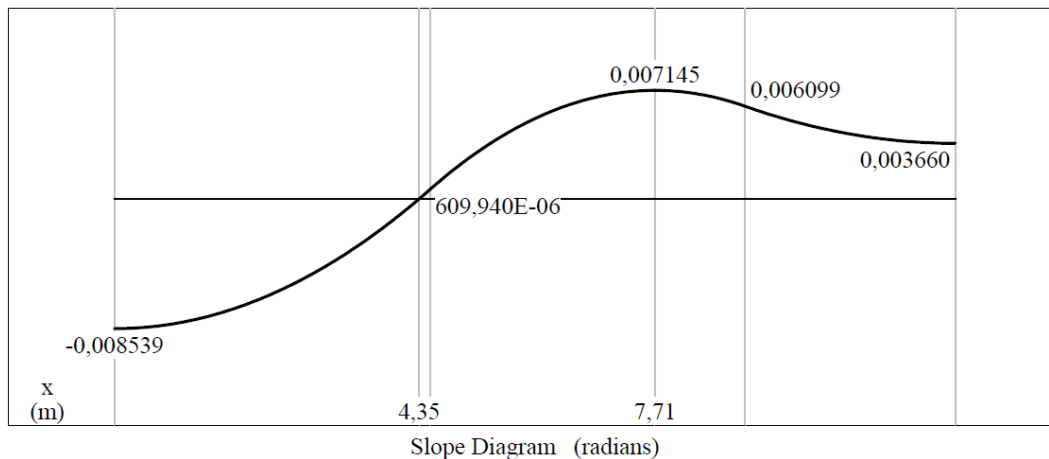
$$\theta_D = \frac{V_{\text{conj-D}}}{EI} = \frac{50.84}{200 \times 10^6 (4.15 \times 10^{-4})} = 0.000613 \text{ rad}$$

Empleando la Ecuación 4.2 se tiene obtiene las deflexiones en C y D:

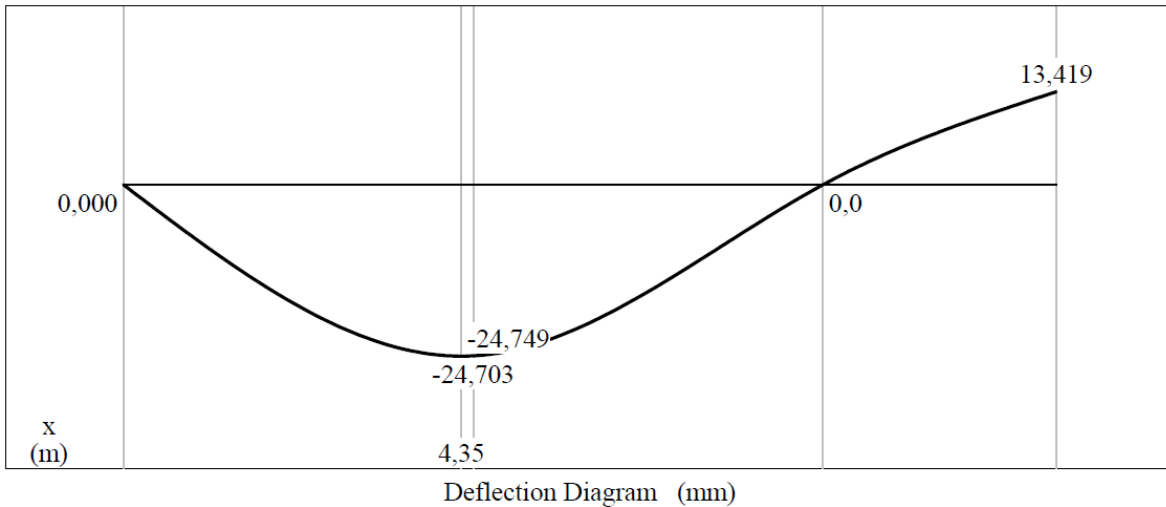
$$y_C = \frac{M_{\text{conj-C}}}{EI} = \frac{1111.28 \text{ m}}{200 \times 10^6 (4.15 \times 10^{-4})} = 0.01339 \text{ m} = 13.39 \text{ mm}$$

$$y_D = \frac{M_{\text{conj-D}}}{EI} = \frac{2049.37 \text{ m}}{200 \times 10^6 (4.15 \times 10^{-4})} = 0.02469 \text{ m} = 24.69 \text{ mm}$$

Se emplea el software MDSolids para validar este resultado como se observa en las Figuras 4.16 y 4.17, siendo coincidente con lo calculado.



**Figura 4.16. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga empotrada con extremo libre (pendiente).**

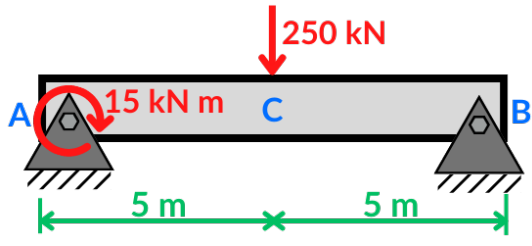
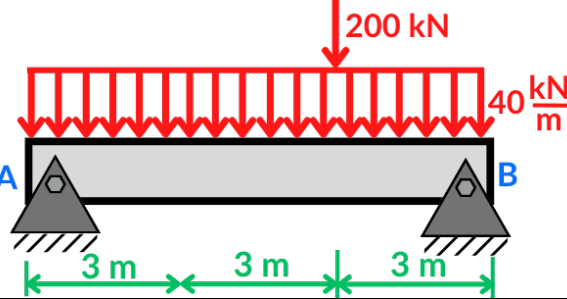
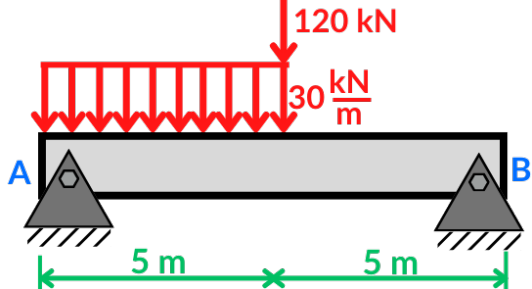
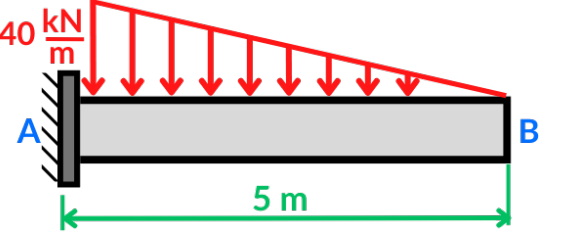
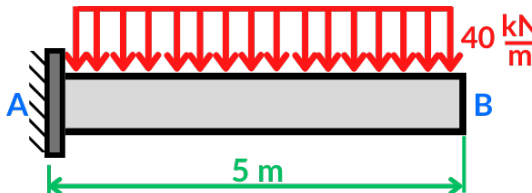
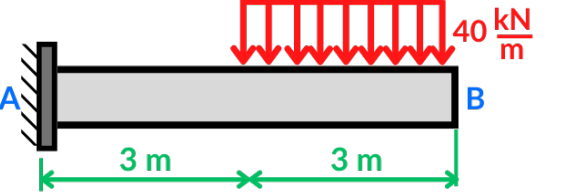


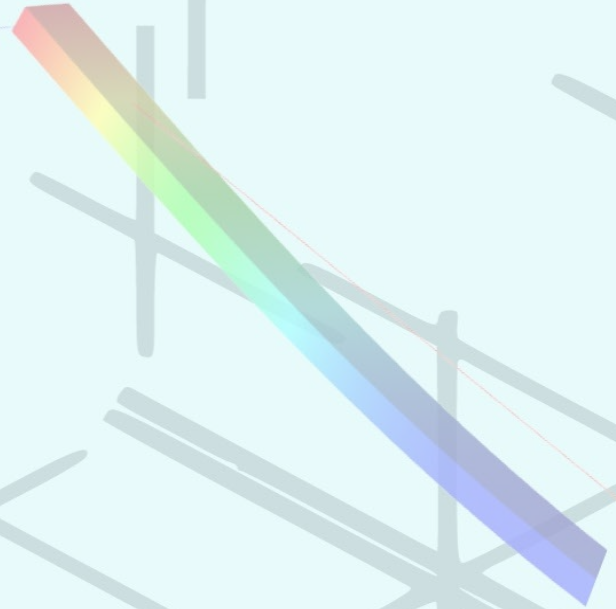
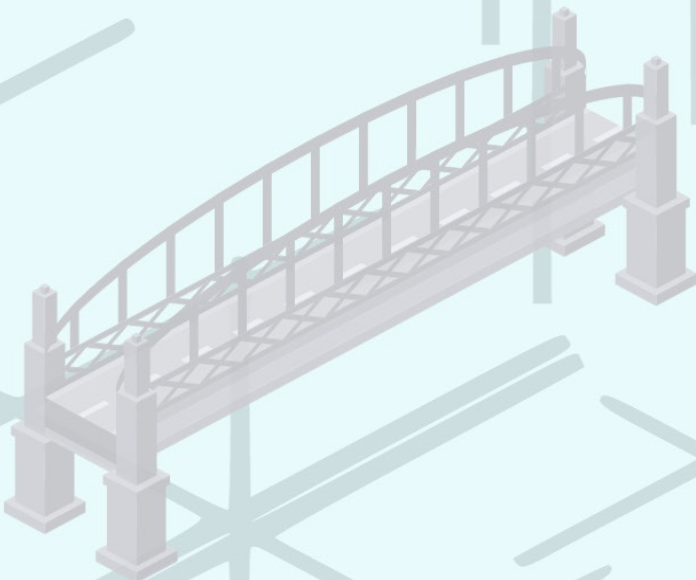
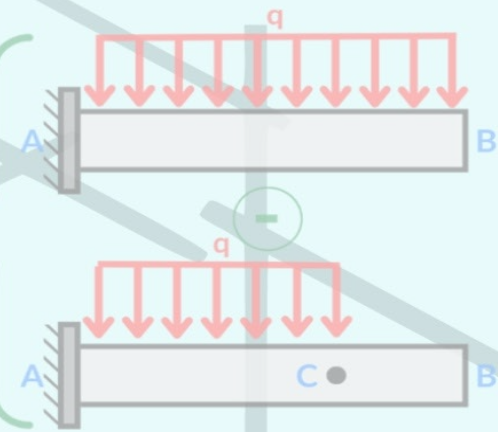
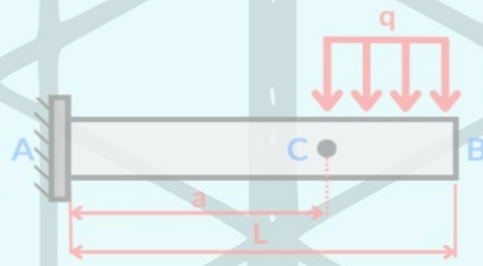
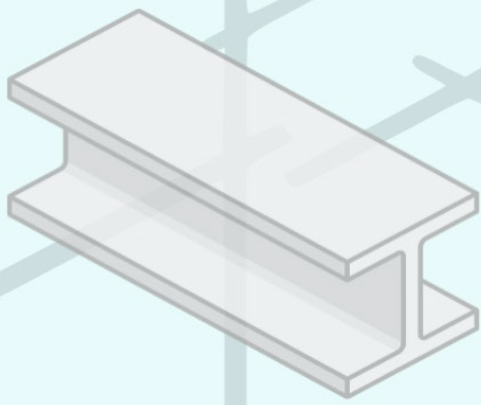
**Figura 4.17. Comprobación mediante MDSolids del método de la viga conjugada para viga empotrada con extremo libre (deflexión).**

**4.5. Problemas**

En los problemas 4.1 a 4.10 aplique el método de momento de la viga conjugada para determinar la deflexión y pendiente según se solicite. Considere EI constante.

<p>Ejercicio 4.1 Encuentre la deflexión en D y pendiente en C</p>	<p>Ejercicio 4.2 Encuentre la deflexión y pendiente en D</p>
<p>Ejercicio 4.3 Encuentre la deflexión en C y D, pendiente en A y B</p>	<p>Ejercicio 4.4 Encuentre la pendiente y deflexión en C y D</p>

	
<p>Ejercicio 4.5 Encuentre la deflexión y pendiente en C</p>	<p>Ejercicio 4.6 Encuentre la deflexión y pendiente en A</p>
	
<p>Ejercicio 4.7 Encuentre la deflexión y pendiente en A</p>	<p>Ejercicio 4.8 Encuentre la deflexión y pendiente en A</p>
	
<p>Ejercicio 4.9 Encuentre la deflexión y pendiente en A</p>	<p>Ejercicio 3.10 Encuentre la deflexión y pendiente en A y B</p>



$$y_{B1} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$y_{B2} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$y_B = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{qL^4}{8EI}$$

# CAPÍTULO V

## VIGAS INDETERMINADAS

## Objetivos

- Abordar el análisis de vigas indeterminadas utilizando métodos avanzados para el cálculo de deflexiones, proporcionando a los lectores una comprensión profunda y práctica de técnicas especializadas en ingeniería estructural.
- Explorar y aplicar métodos como el de las fuerzas conjugadas, las ecuaciones diferenciales, la energía de deformación y otros métodos avanzados en el análisis de vigas indeterminadas, focalizándose en la determinación precisa de las deflexiones.
- Guiar a los lectores a través de la aplicación de estos métodos en el análisis de vigas con condiciones de contorno complejas, cargas variables y restricciones estructurales, demostrando la versatilidad y efectividad de cada método en situaciones desafiantes.
- Demostrar la aplicabilidad práctica de estos métodos mediante ejemplos detallados y problemas representativos que aborden situaciones realistas de ingeniería mecánica, permitiendo a los lectores desarrollar habilidades para resolver problemas complejos de deflexión en vigas indeterminadas.
- Fomentar la capacidad de los lectores para evaluar y validar los resultados obtenidos mediante el uso de estos métodos en el análisis de vigas indeterminadas, resaltando la importancia de la verificación de cálculos y la comprensión de la precisión y las limitaciones inherentes a cada técnica.

## 5.1. Generalidades

Una viga es estáticamente indeterminada si el número de reacciones en los apoyos es superior al número de ecuaciones de equilibrio independientes (B. Raghu Kumar, 2022). Refiriéndose a vigas con sujeciones adicionales, redundantes, más allá de las esenciales para detener los movimientos del cuerpo rígido como lo son: las vigas empotradas apoyadas, doble empotramiento y vigas continuas con tres o más apoyos (Bhaskar & Varadan, 2023).

El enfoque general utilizado para resolver vigas estáticamente indeterminadas consiste en seleccionar las reacciones redundantes y desarrollar una ecuación pertinente para cada redundante a partir de la configuración deformada de la viga cargada. Para desarrollar estas ecuaciones geométricas, se seleccionan las reacciones redundantes y se eliminan de la viga. La viga que queda se denomina viga liberada. La viga liberada debe ser estable (es decir, capaz de soportar las cargas) y estáticamente determinada, de modo que las reacciones de la viga liberada puedan determinarse mediante consideraciones de equilibrio. El efecto de las reacciones redundantes se aborda por separado, mediante el conocimiento de las deflexiones o rotaciones que deben producirse en el apoyo redundante (Philpot, 2017b)

## 5.2. Ventajas

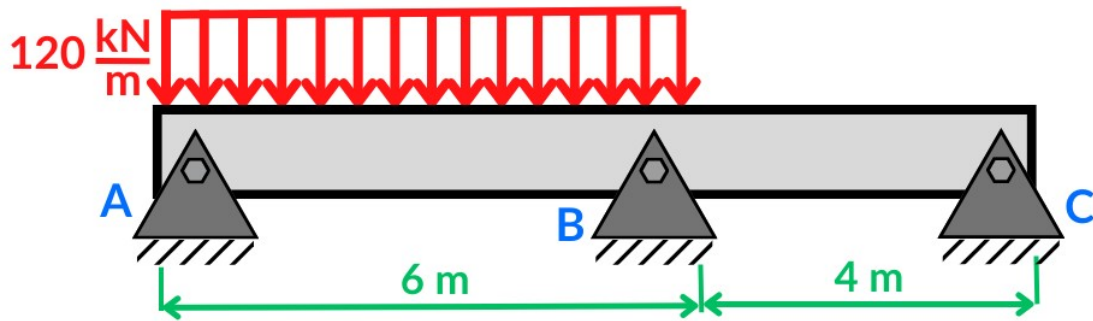
Existen algunas ventajas de las estructuras estáticamente indeterminadas frente a las estructuras determinadas (Kassimali, 2020b), se detallan a continuación:

- Los esfuerzos máximos en estructuras estáticamente indeterminadas suelen ser inferiores a las de estructuras determinadas comparables.
- Las estructuras estáticamente indeterminadas suelen tener rigideces mayores (es decir, deformaciones menores) que las de estructuras determinadas comparables.
- Las estructuras indeterminadas tienen más miembros o reacciones de apoyo de las necesarias para la estabilidad estática, por lo que si una parte (o miembro o apoyo) de una estructura de este tipo falla, no necesariamente se derrumbará toda la estructura, y las cargas se redistribuirán a las partes adyacentes de la estructura.

## 5.3. Doble integración

El procedimiento es esencialmente el mismo que para una viga estáticamente determinada, consiste en escribir la ecuación diferencial, integrarla para obtener su solución general y, a continuación, aplicar las condiciones de contorno y otras condiciones para evaluar las incógnitas. Las incógnitas consisten en las reacciones redundantes, así como las constantes de integración (Goodno, Barry & Gere, 2018).

**Ejemplo 5.1.** Determine las reacciones en los apoyos para la viga que se muestra en la Figura 5.1, considere que  $EI = 200000 \text{ kN m}^2$ . Desprecie los efectos de la carga axial.



**Figura 5.1** Aplicación del método de doble integración en viga indeterminada.

**Datos**

$$EI = 200000 \text{ kN m}^2$$

$$L = 7 \text{ m}$$

$$q = 120 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

**Resolución**

Realizando sumatoria de fuerzas en y se tiene la expresión I:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y + B_y + C_y - 120 (6) = 0$$

$$A_y + B_y + C_y - 720 = 0$$

$$A_y + B_y + C_y = 720 \quad [I]$$

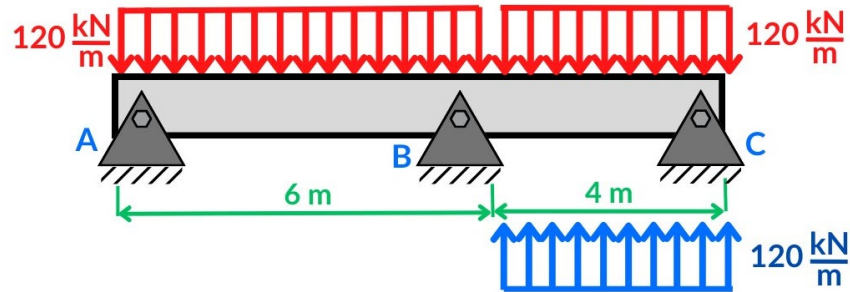
Realizando sumatoria de momentos en el punto A se tiene la expresión II:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-120 (6) \left(\frac{6}{2}\right) + B_y(6) + C_y(10) = 0$$

$$-2160 + 6B_y + 10C_y = 0 \quad \text{[II]}$$

Se completa la carga distribuida para el análisis del momento interno como se muestra en la Figura 5.2.



**Figura 5.2 Aplicación del método de doble integración en viga indeterminada (completar carga).**

Para la aplicación del método de Macaulay se debe realizar un corte en el punto más alejado hacia la derecha donde se pueda obtener el momento interno, como se realiza a continuación:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$-A_y x + 120 (x) \left(\frac{x}{2}\right) - B_y (x - 6) - 120 (x - 6) \left(\frac{x - 6}{2}\right) + M = 0$$

$$-A_y x + 60 x^2 - B_y (x - 6) - 60 (x - 6)^2 + M = 0$$

$$M = A_y x - 60 x^2 + B_y (x - 6) + 60 (x - 6)^2$$

Observando que la viga al deformarse se produce compresión en la parte superior, se considera que el momento  $M_x$  es positivo, sustituyendo el momento encontrado en la Ecuación 1.8 se obtiene la expresión [III]:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = A_y x - 60 x^2 + B_y (x - 6) + 60 (x - 6)^2 \quad \text{[III]}$$

Integrando dos veces la expresión [III] se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{2} x^2 - \frac{60}{3} x^3 + \frac{B_y}{2} (x - 6)^2 + \frac{60}{3} (x - 6)^3 + C_1 \quad \text{[IV]}$$

$$EI y = \frac{A_y}{6} x^3 - 5 x^4 + \frac{B_y}{6} (x - 6)^3 + 5 (x - 6)^4 + C_1 x + C_2 \quad \text{[V]}$$



En la condición de frontera del apoyo izquierdo, cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ , se observa que en el segundo y tercer término se cumple la primera condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x < a$  se sustituye todas las expresiones en paréntesis por cero. Reemplazando estos elementos en la expresión [V] se tiene:

$$EI(0) = \frac{A_y}{6}(0)^3 - 5(0)^4 + \frac{B_y}{6}(0)^3 + 5(0)^4 + C_1(0) + C_2$$

$$0 = 0 - 0 + 0 + 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

En la condición de frontera en el extremo de la viga, cuando  $x = 6$ ,  $y = 0$ ,  $C_2 = 0$  se observa que todos los términos en paréntesis cumplen la segunda condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x > a$  se consideran todas las expresiones involucradas. Reemplazando estos elementos en la expresión [VI] se tiene la expresión:

$$EI(0) = \frac{A_y}{6}(6)^3 - 5(6)^4 + \frac{B_y}{6}(6-6)^3 + 5(6-6)^4 + C_1(6) + 0$$

$$0 = 36A_y - 5(6)^4 + \frac{B_y}{6}(0)^3 + 5(0)^4 + C_1(6) + 0$$

$$0 = 36A_y - 6480 + 6C_1 \quad \text{[VI]}$$

En la condición de frontera en el extremo de la viga, cuando  $x = 10$ ,  $y = 0$ ,  $C_2 = 0$  se observa que todos los términos en paréntesis cumplen la segunda condición de la Ecuación 1.34 que indica que cuando  $x > a$  se consideran todas las expresiones involucradas. Reemplazando estos elementos en la expresión [VII] se tiene:

$$EI(0) = \frac{A_y}{6}(10)^3 - 5(10)^4 + \frac{B_y}{6}(10-6)^3 + 5(10-6)^4 + C_1(10) + 0$$

$$0 = \frac{500A_y}{3} - 50000 + \frac{32}{3}B_y + 1280 + 10C_1 + 0$$

$$0 = \frac{500A_y}{3} - 48720 + \frac{32}{3}B_y + 10C_1 \quad \text{[VII]}$$

Resolviendo las ecuaciones [I], [II], [VI] y [VII] se obtiene que:

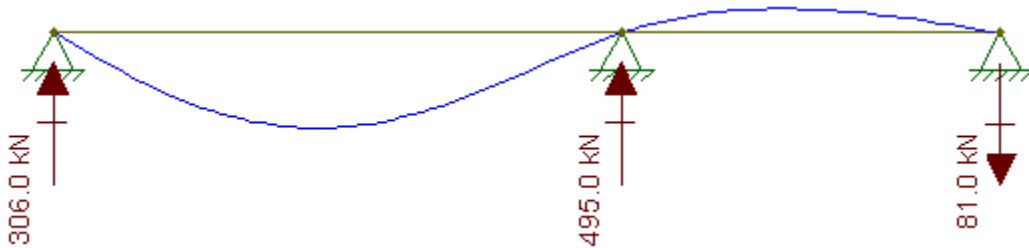
$$C_1 = -756 \text{ kN mm}^2$$

$$A_y = 306 \text{ kN}$$

$$B_y = 495 \text{ kN}$$

$$C_y = -81 \text{ kN}$$

Adicionalmente se emplea el software Ftool para validar este resultado como se observa en la Figura 5.3, siendo el valor de las reacciones coincidentes con lo calculado.

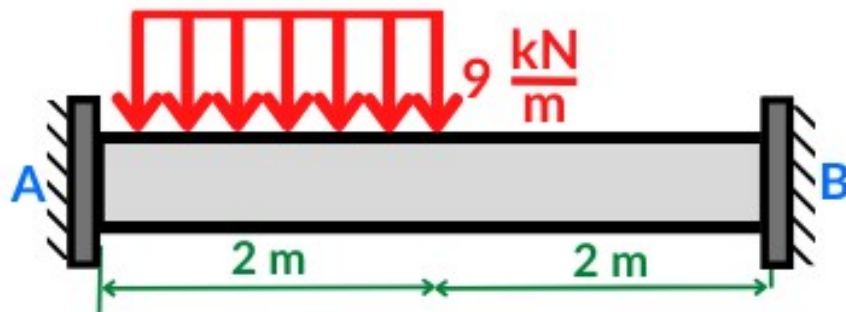


**Figura 5.3. Comprobación mediante Ftool de viga indeterminada para el método de doble integración.**

#### 5.4. Superposición

En una viga estáticamente indeterminada dada, se utiliza el método de superposición para satisfacer las condiciones de contorno que existen en los apoyos de la viga. Este procedimiento conduce a una o más relaciones entre las cantidades desconocidas que complementan las ecuaciones de equilibrio disponibles (Muvdi & Elhouar, 2016).

**Ejemplo 5.2. Determine las reacciones en el punto B para la viga que se muestra en la Figura 5.4, EI es constante. Desprecie los efectos de la carga axial.**



**Figura 5.4 Aplicación del método de superposición en viga indeterminada.**

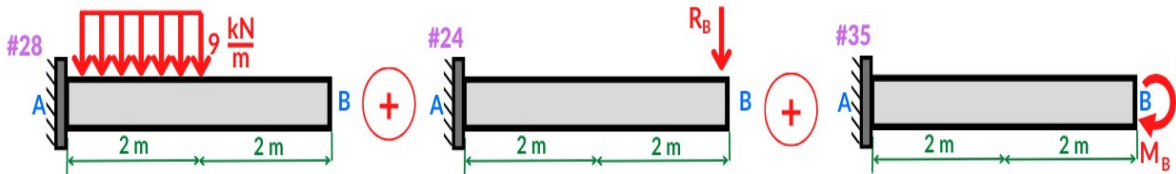
#### Datos

$$L = 4 \text{ m}$$

$$q = 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

### Resolución

Se procede a dividir las cargas aplicadas en la viga según los casos 28, 24 y 35 indicados en la Tabla 2.1 como se muestra en la Figura 2.5. De manera que se empleen las ecuaciones correspondientes para determinar las deflexiones y pendientes individuales en el punto B.



**Figura 5.5** Aplicación de división de cargas según el método de superposición en viga indeterminada.

#### **Caso 28**

$$y_{B1} = -\frac{7qL^4}{384EI} = -\frac{7(9)(4)^4}{384EI} = -\frac{42}{EI}$$

$$\theta_{B1} = -\frac{qL^3}{48EI} = -\frac{9(4)^3}{48EI} = -\frac{12}{EI}$$

#### **Caso 24**

$$y_{B2} = -\frac{PL^3}{3EI} = -\frac{R_B(4)^3}{3EI} = -\frac{64R_B}{3EI}$$

$$\theta_{B2} = -\frac{PL^2}{2EI} = -\frac{R_B(4)^2}{2EI} = -\frac{8R_B}{EI}$$

#### **Caso 35**

$$y_{B3} = -\frac{ML^2}{2EI} = -\frac{M_B(4)^2}{2EI} = -\frac{8M_B}{EI}$$

$$\theta_{B3} = -\frac{ML}{EI} = -\frac{M_B(4)}{EI} = -\frac{4M_B}{EI}$$

Se determina la deformación y pendiente total en B sumando cada una de las deformaciones y pendientes individuales en ese punto, como detalle importante se debe recordar que inicialmente el punto B estaba restringido, por lo que la deformación y pendiente en ese punto es igual a cero.

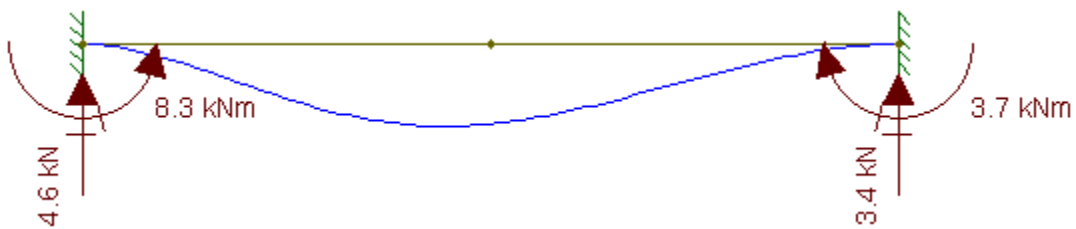
$y_B = y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} = 0$ $-\frac{42}{EI} - \frac{64R_B}{3EI} - \frac{8M_B}{EI} = 0$ $-42 - \frac{64R_B}{3} - 8M_B = 0$ $42 + \frac{64R_B}{3} + 8M_B = 0 \quad \text{[I]}$
$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} + \theta_{B3} = 0$ $-\frac{12}{EI} - \frac{8R_B}{EI} - \frac{4M_B}{EI} = 0$ $-12 - 8R_B - 4M_B = 0$ $12 + 8R_B + 4M_B = 0 \quad \text{[II]}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones [I] y [II] se obtiene que:

$$R_B = 3.375 \text{ kN}$$

$$M_B = -3.75 \text{ kN m}$$

Adicionalmente se emplea el software Ftool para validar este resultado como se observa en la Figura 5.6, siendo el valor del momento en B coincidentes con lo calculado.



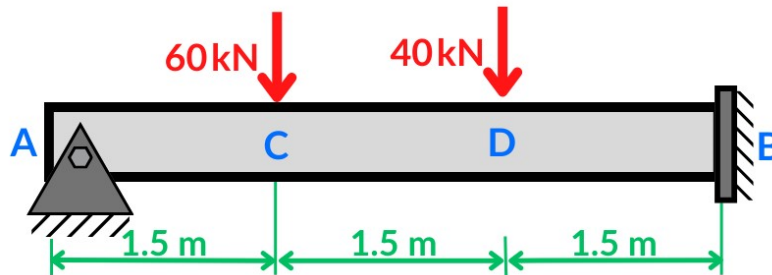
**Figura 5.6. Comprobación mediante Ftool de viga indeterminada para el método de superposición.**

### 5.5. Momento de área

Para una viga indeterminada en primer grado, una de las reacciones se designa como redundante, y el apoyo correspondiente se elimina o modifica en consecuencia. La reacción redundante se trata entonces como una carga desconocida que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. Esta condición de

compatibilidad suele expresarse escribiendo que la desviación tangencial de un apoyo con respecto a otro es cero o tiene un valor predeterminado (Beer et al., 2020).

**Ejemplo 5.3.** Determine la reacción en el punto A para la viga que se muestra en la Figura 5.7, EI es constante. Desprecie los efectos de la carga axial.



**Figura 5.7** Aplicación del método de momento de área en viga indeterminada (método por partes).

**Datos**

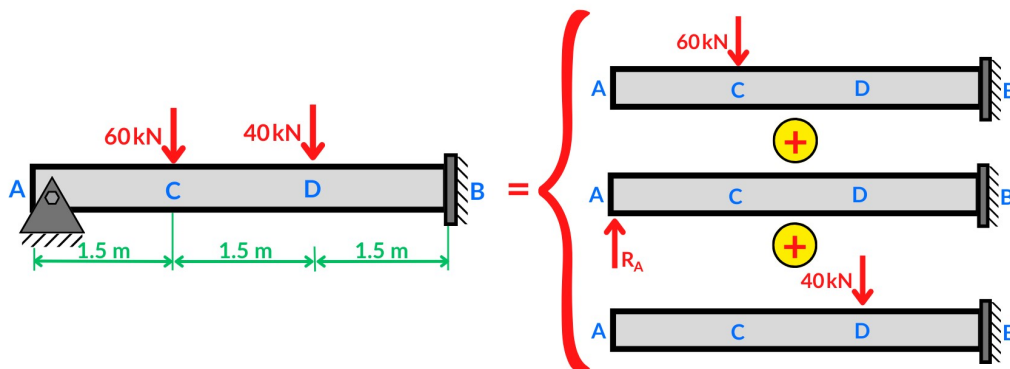
$$L = 4.5 \text{ m}$$

$$P_1 = 60 \text{ kN}$$

$$P_2 = 40 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

**Resolución**

Se procede a mover el apoyo del punto A y convertirlo en redundante, con lo cual se puede dividir las condiciones de carga para realizar los diagramas de momentos individuales como se muestra en la Figura 5.8.



**Figura 5.8** Representación de división de cargas para aplicación de método de momento de área por partes.

### Caso 1

Realizando momento desde el punto B:

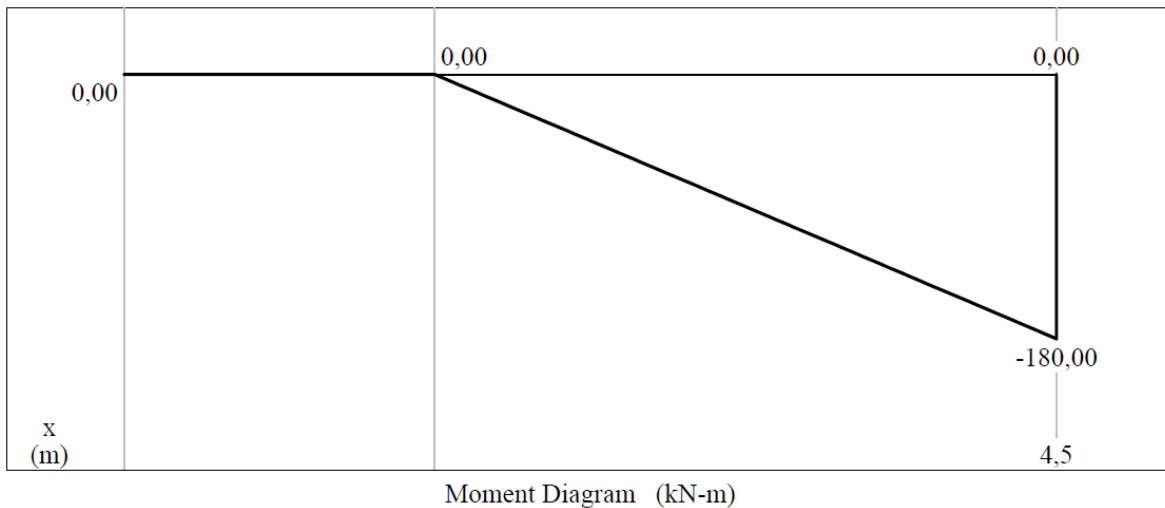
$$\Sigma M_B = 0$$

$$60(3) - M_{B1} = 0$$

$$180 - M_{B1} = 0$$

$$M_{B1} = 180 \text{ kN m}$$

Con el valor del momento encontrado se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids como se muestra en la Figura 5.9.



**Figura 5.9. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes en viga indeterminada (Caso 1).**

### Caso 2

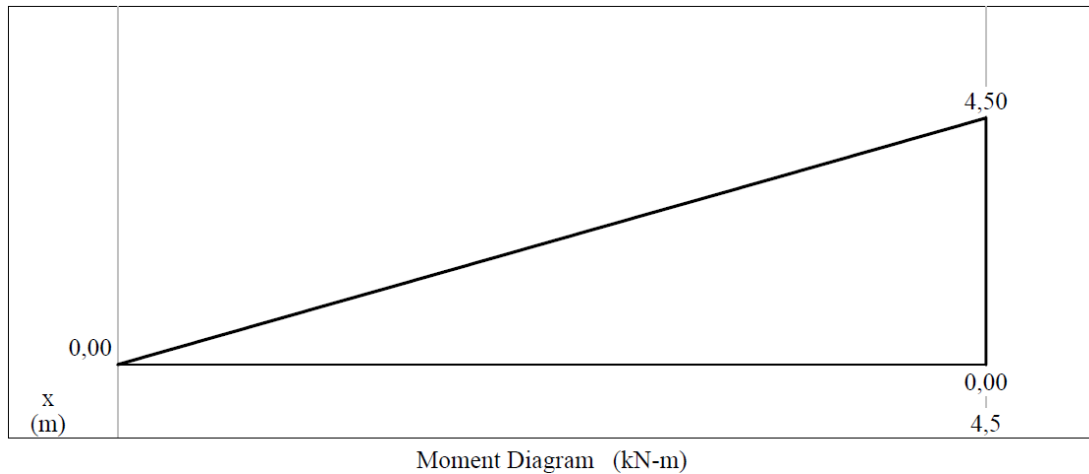
Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A(4.5) - M_{B2} = 0$$

$$M_{B2} = 4.5R_A$$

Con el valor del momento encontrado se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids como se muestra en la Figura 5.10.



**Figura 5.10. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes en viga indeterminada (Caso 2).**

### Caso 3

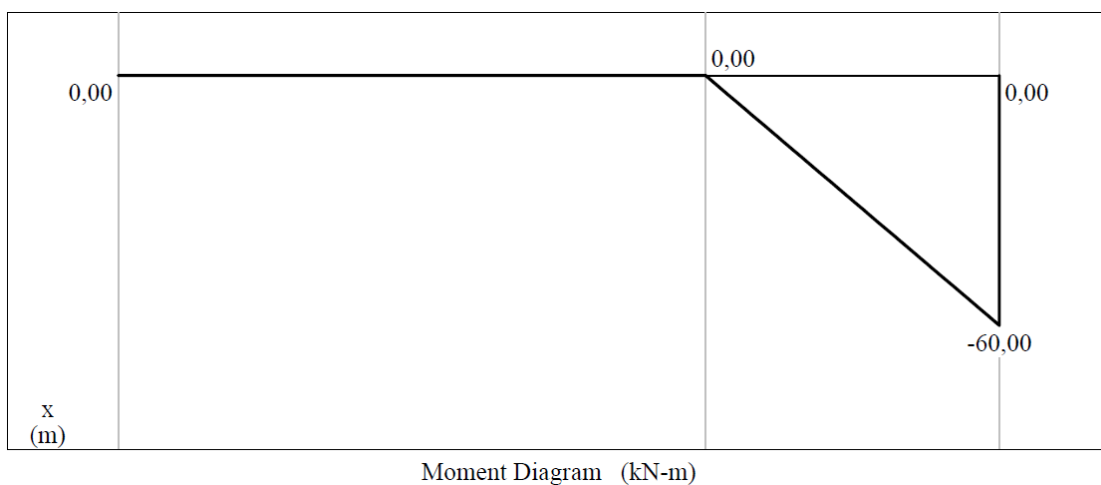
Realizando momento desde el punto B:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$40(1.5) - M_{B3} = 0$$

$$M_{B3} = 60 \text{ kN m}$$

Con el valor del momento encontrado se procede a realizar el diagrama de momentos, para ello se emplea MDSolids como se muestra en la Figura 5.11.



**Figura 5.11. Obtención del diagrama de momentos MDSolids para el método de momento de área por partes en viga indeterminada (Caso 3).**

Se considera que la deformación alcanzada entre AB es cero, debido a los apoyos en los extremos. Empleando la Ecuación 3.3, y reemplazando los valores de las áreas correspondientes del tramo AB según la Tabla 3.1 se tiene:

$$y_{A/B} = \frac{1}{EI} (A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{(180)(3)}{2} \left( 1.5 + \frac{2(3)}{3} \right) - \frac{4.5R_A(4.5)}{2} \left( \frac{2(4.5)}{3} \right) + \frac{60(1.5)}{2} \left( 3 + \frac{2(1.5)}{3} \right) \right] = 0$$

$$\frac{1}{EI} [1125 - 30.375R_A] = 0$$

$$1125 - 30.375R_A = 0$$

$$30.375R_A = 1125$$

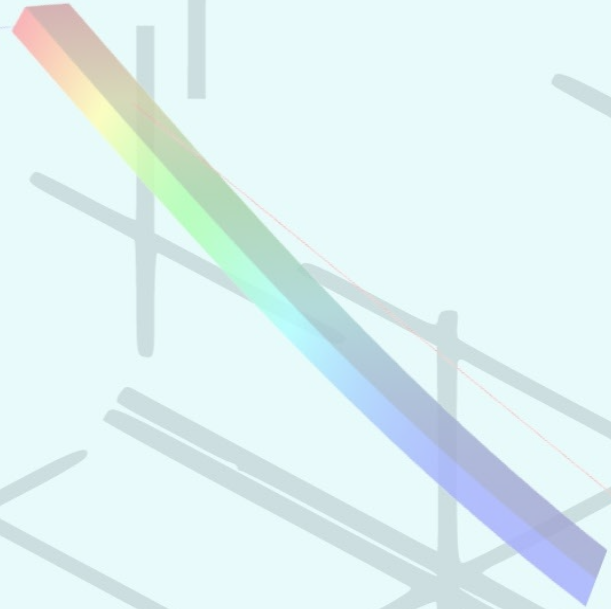
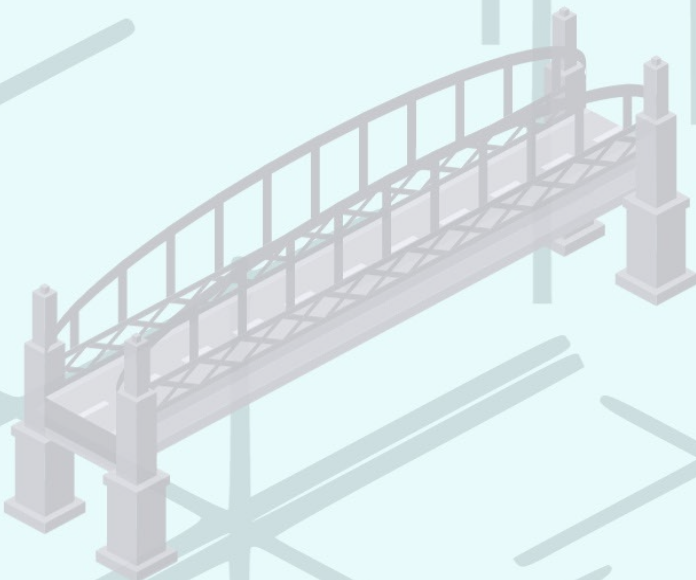
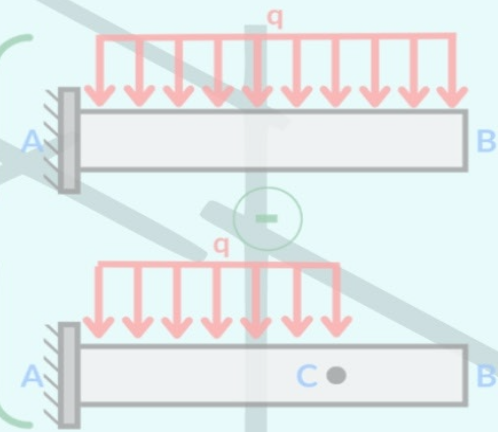
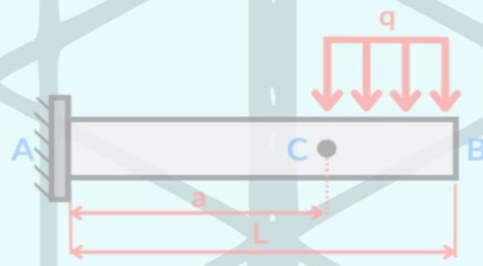
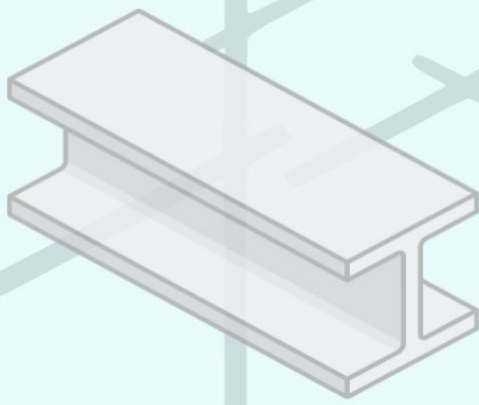
$$R_A = \frac{1125}{30.375} = 37.037 \text{ kN}$$



## Bibliografia

- B. Raghu Kumar. (2022). Statically indeterminate beams. *Strength of materials* (pp. 120-152). CRC Press. 10.1201/9781003298748
- Bedford and Liechti. (2020). Deflections of beams. In A. Bedford, & K. M. Liechti (Eds.), *Mechanics of materials* (pp. 671-728). Springer International Publishing. 10.1007/978-3-030-22082-2\_9
- Beer, et al. (2020). Deflections of beams. In , (Ed.), *Mechanics of materials* (8th ed., pp. 599-689). McGraw-Hill Education.
- Bhaskar and Varadan. (2023). Beams–Deflections. In K. Bhaskar, & T. K. Varadan (Eds.), *Strength of materials: A concise textbook* (pp. 61-90). Springer International Publishing. 10.1007/978-3-031-06377-0\_7
- Gamio. (2014). Método viga conjugada. In E. Macro (Ed.), (1; 1 ed., pp. 377-394). Macro.
- Goodno and Gere James. (2018). Deflections of beams. *Mechanics of materials* (pp. 811-908). Cengage learning.
- Goodno and Gere. (2018). Statically indeterminate beams. In , (Ed.), *Mechanics of materials* (9th ed., pp. 909-962). Cengage Learning.
- Hibbeler. (2020). Deflections. *Structural analysis* (pp. 294-337). Pearson Education.
- Kassimali. (2020a). Deflections of beams: Geometric methods. *Structural analysis* (pp. 224-288). Cengage Learning.

- Kassimali. (2020b). Introduction to statically indeterminate structures. *Structural analysis* (pp. 441-470). Cengage Learning.
- Limbrunner and D'Allaird. (2016). Deflection of beams. *Applied statics and strength of materials* (pp. 334-365). Pearson.
- Muvdi and Elhouar. (2016). Bending loads: Deflections under symmetric loading . In , (Ed.), *Mechanics of materials : With applications in excel* (pp. 391-472). Taylor & Francis.
- Philpot. (2017a). Beam deflections. In , (Ed.), (4th ed., pp. 391-444). John Wiley & Sons.
- Philpot. (2017b). Statically indeterminate beams. In , (Ed.), (4th ed., pp. 469-506). John Wiley & Sons.
- R.K. Kaushik. (2019). Deflection of beams. *Strength of materials* (pp. 234-290). Dreamtech Press.
- Rajput. (2018). Deflection of beams. *A textbook of strength of materials* (pp. 331-455). S. Chand Publishing.
- Singh. (2021). Deflections of beams. In D. K. Singh (Ed.), *Strength of materials* (pp. 251-318). Springer International Publishing. 10.1007/978-3-030-59667-5\_6
- Srivastava and Gope. (2012). Deflection of beams. *Strength of materials* (pp. 158-209). PHI Learning Private Limited.



ESTE LIBRO SURGE DE LA NECESIDAD POR COMPRENDER LA MECÁNICA SUBYACENTE QUE DICTA CÓMO LAS VIGAS SOPORTAN CARGA Y RESISTEN LAS FUERZAS QUE MOLDEAN NUESTRO ENTORNO. SE HA DISEÑADO ESPECÍFICAMENTE PARA ESTUDIANTES, INGENIEROS Y ENTUSIASTAS DE LA INGENIERÍA MECÁNICA QUE BUSCAN PROFUNDIZAR EN LA ESENCIA DE CÓMO LAS VIGAS, ELEMENTOS APARENTEMENTE SIMPLES, SOSTIENEN LA COMPLEJIDAD DE MÁQUINAS Y ESTRUCTURAS ROBUSTAS.

ISBN: 978-9942-626-20-2



  
EDICIONES  
**GESTICAP**